УДК 519.714

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ЧАСТОТНО-ВРЕМЕННЫМ МЕТОДОМ

В.Н. Овчаренко
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4
E-mail: owcharenko.v@yandex.ru

Ключевые слова: идентификация параметров, частотный метод, запаздывание.

Аннотация: Рассмотрен частотно-временной метод идентификации динамических систем с постоянными параметрами и с запаздываниями в наблюдаемых переменных. Установлено свойство разделимости задачи идентификации на задачу оценивания неизвестных параметров и задачу оценивания начальных условий. Рассмотрено применение частотно-временного метода к идентификации дифференциального уравнения осциллятора Ван дер Поля, нелинейного как по состоянию, так и по параметрам.

1. Введение

Существует потребность в идентификации математических моделей динамики летательных аппаратов по данным натурных и полунатурных экспериментов. Задача оценивания неизвестных параметров традиционно решается во временной области и связана с необходимостью численного интегрирования дифференциальных уравнений. В случае большой размерности вектора состояния и вектора неизвестных параметров задачу параметрической идентификации целесообразно решать в частотной области.

В [1] предложено обобщение частотного подхода на стационарные линейные системы с многомерными входами и выходами. Такой метод идентификации был назван частотно-временным методом. В этом методе многомерные входы и выходы рассматриваются совместно. После вычисления оценок параметров при необходимости можно вычислить передаточные функции по любой паре вход-выход.

В предлагаемой работе метод частотно-временной идентификации обобщается на стационарные линейные системы с многомерным запаздыванием и на нелинейные динамические системы.

2. Оценивание параметров и запаздываний в измерениях состояния линейных систем

Запаздывание есть интервал времени между первым изменением входного и первого (значимого) изменения выходного сигналов. Оценка запаздывания связана с используемой параметрической моделью и оценивается совместно с неизвестными параметрами модели. Существуют несколько методов оценки временных запаздываний в линейных системах: а) во временной области, б) в частотной области и в) в частотно-временной области. Рассмотрим оценивание векторного запаздывания в линейных стационарных динамических системах частотно-временным методом на основе применения финитного преобразования Фурье.

Пусть динамическая система на интервале времени $[0, T]$ описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t); \\ &y(t) = C(\theta)x(t) + D(\theta)u(t); \\ &z_q(t) = y_q(t - \tau_k) + S^{(q)}\eta(t), q = \overline{1, m}. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $x(t)$ $-n$-мерный вектор состояния; $u(t)-$ r-мерный вектор управления; $\theta \in \Theta$ $-p$-мерный вектор неизвестных параметров; $A(\theta), B(\theta)$ – матрицы соответствующих размеров; $y(t)$ $-m$-мерный вектор измерений; $C(\theta), D(\theta)$ – матрицы размеров $m \times n$ и $m \times r$ соответственно; $z_q, \tau_q \geq 0, (q = \overline{1, m})$ – наблюдение и запаздывание в $q -$ м измерительном канале соответственно; $S^{(q)}$ – q-я вектор-строка интенсивности шумов наблюдений; $\eta(t)$ – m-мерный стационарный случайный процесс с нулевым средним, описывает ошибки наблюдений; начальные условия $x(0)$ в общем случае неизвестны.

Предположим, что в общем случае начальные условия $x(0) \neq 0$ и могут быть (в зависимости от структуры матрицы *H)* неизвестными полностью или частично или наблюдаемыми с большой погрешностью. Кроме того, предположим, что на интервале $[0, T]$ выполняется условие $u(t) \neq \text{const}$.

П о с т а н о в к а з а д а ч и. По наблюдениям процессов $(z_q(t), u(t),\ q = \overline{1, m})$ на интервале $[0, T]$ требуется оценить неизвестные параметры $\theta \in \Theta$, запаздывания τ_q и, в общем случае, начальные условия $x(0)$ динамической системы (1).

Выполним переход в частотную область. Определим дискретное множество частот

$$\Omega = \left\{\omega : \omega = \frac{2\pi}{T}k;\ k = \overline{1, K}\right\} \tag{2}$$

и вычислим финитное преобразование Фурье $q -$й компоненты вектора $z(t)$ на интервале $[0, T]$ на дискретном множестве частот (2):

$$Z_q(j\omega_k) = \int_0^T y_q(t - \tau_q)e^{-j\omega_k t}dt + S^{(q)}\eta(j\omega_k),\ \ j = \sqrt{-1}.$$

После подстановки сюда второго уравнения системы (1) получим

$$Z_q(j\omega_k) = C^{(q)} \int_0^T x(t - \tau_q)e^{-j\omega_k t}dt + D^{(q)} \int_0^T u(t - \tau_q)e^{-j\omega_k t}dt + S^{(q)}\eta(j\omega_k). \tag{3}$$

В этом выражении $C^{(q)}, D^{(q)}, S^{(q)}$ – q-е вектор-строки матриц $C(\theta), D(\theta), S$.

Заменой переменных в интегралах и выполнения необходимых преобразований выражение (3) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} Z_q(j\omega_k) = e^{-j\omega_k\tau_q} &\left\{C^{(q)} \int_{-\tau_q}^{T-\tau_q} x(t)e^{-j\omega_k t}dt + D^{(k)} \int_{-\tau_q}^{T-\tau_q} u(t)e^{-j\omega_k t}dt\right\} + \\ &+ S^{(k)}\eta(j\omega_k) \end{aligned} \tag{4}$$

Каждый из интегралов в скобках может быть представлен как

$$\begin{aligned} \int_{-\tau_q}^{T-\tau_q} (x(t), u(t))e^{-j\omega_k t}dt = \int_0^T (x(t), u(t))e^{-j\omega_k t}dt + \int_{-\tau_q}^0 (x(t), u(t))e^{-j\omega_k t}dt - \\ - \int_{T-\tau_q}^T \big(x(t), u(t)\big)e^{-j\omega_k t}dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Предположим, что τ_q – малая величина, в том смысле, что на интервале длиной τ_q справедливы равенства

$$x(t) = x(0);\ u(t) = u(0), \qquad t \in [-\tau_q, 0];$$

$$x(t)=x(T);\ u(t)=u(T),\qquad t\in\left[T-\tau_q,T\right].$$

При этом предположении и с учетом свойства $e^{-j\omega_k T}=1$ последние два интеграла в (5) можно вычислить аналитически, получим

$$\int_{-\tau_q}^{0}\big(x(t),u(t)\big)e^{-j\omega_k t}dt=-\frac{1}{j\omega_k}\big(1-e^{j\omega_k\tau_q}\big)\big(x(0),u(0)\big);$$

$$\int_{T-\tau_q}^{T}(x(t),u(t))e^{-j\omega_k t}dt=-\frac{1}{j\omega_k}\big(1-e^{j\omega_k\tau_q}\big)\big(x(T),u(T)\big).$$

После подстановки результатов этих вычислений в (5) и в исходное выражение (4) запишем

$$Z_q(j\omega_k)=e^{-j\omega_k\tau_q}G^{(q)}(j\omega_k)+\frac{1}{j\omega_k}\big(1-e^{-j\omega_k\tau_q}\big)F^{(q)}+S^{(q)}\eta(j\omega_k),\tag{6}$$

где

$$G^{(q)}(j\omega_k)=C^{(q)}X_T(j\omega_k)+D^{(q)}U_T(j\omega_k);\ F^{(q)}=C^{(q)}\delta x+D^{(q)}\delta u;$$
$$\delta x=x(0)-x(T);\ \delta u=u(0)-u(T);\tag{7}$$
$$\big(X_T(j\omega_k),U_T(j\omega_k)\big)=\int_0^T\big(x(t),u(t)\big)e^{-j\omega_k t}dt,$$

так как входной сигнал $u(t)$ наблюдается, то δu - известна.

Выражение (6) показывает, что при вычислении оценок запаздываний кроме разности по состоянию δx необходимо учитывать и разность по управлению δu.

Финитное преобразование Фурье вектора состояния $X_T(j\omega_k)$, как функция неизвестных параметров, может быть вычислено по первому уравнению системы (1)

$$X_T(j\omega_k)=(j\omega_k E-A(\theta))^{-1}[\delta x+B(\theta)U_T(j\omega_k)].$$

В случае равных граничных условий по состоянию и управлению $\delta x=0;\ \delta u=0$ и выражения (6), (7) существенно упрощаются.

Таким образом, при известных значениях запаздывания, параметров и граничных условий выражения (6), (7) могут быть вычислены для всего частотного диапазона (2).

Вычисляя невязку в частотной области, получим

$$\varepsilon_q(j\omega_k)=Z_q^f(j\omega_k)-Z_q(j\omega_k),$$

где $Z_q^f(j\omega_k)$ – преобразование Фурье полетных данных; $Z_q(j\omega_k)$ рассчитывается по формуле (6). Оценки неизвестных параметров $\hat{\theta}$ зависят от разности граничных условий, как по состоянию δx, так и по управлению δu.

Далее методом наименьших квадратов вычисляются оценки параметров $\hat{\theta}$, разности граничных условий $\delta\hat{x}$ и запаздывания $\hat{\tau}$:

$$(\hat{\theta},\delta\hat{x},\hat{\tau})=arg\min_{(\theta\in\Theta,\delta x,\tau)}\left\{\sum_{\omega}\sum_{q=1}^{m}\varepsilon_q(-j\omega_k)\,\varepsilon_q(j\omega_k)\right\};\ \tau=(\tau_1,\cdots,\tau_m)^{\mathrm{T}}.$$

Оценка начальных условий $\hat{x}(0)$ на оценках параметров $\hat{\theta}$ и запаздываний $\hat{\tau}$ вычисляется методом взвешенных наименьших квадратов во временной области

$$\hat{x}(0)=arg\min_{x(0)}\int_0^T e^{\mathrm{T}}\left(t,\hat{\theta},x(0)\right)We\left(t,\hat{\theta},x(0)\right)dt,$$

где W – неотрицательно определенная весовая матрица порядка n.

3. Идентификация параметров нелинейной системы

В [2] отмечена важность исследования влияния динамических эффектов запаздывания и восстановления отрывного обтекания на характеристики возмущенного движения самолета на больших углах атаки. Установлено, что динамические эффекты развития отрывного обтекания крыла могут приводить к антидемпфированию по углу атаки.

Характер автоколебаний указывает на нелинейную структуру математической модели развития срывного режима (аэродинамического гистерезиса) и позволяет предположить, что математическая модель может быть описана уравнением осциллятора Ван дер Поля

(8) $$\ddot{\alpha} - \mu(\lambda - \alpha^2)\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = u,$$

где α – угол атаки; u – входной сигнал, используемый в методе вынужденных колебаний в аэродинамической трубе; μ, λ, ω_0^2 – неизвестные параметры. Уравнение (8) описывает динамическую систему, демпфирование которой зависит от текущего угла атаки, является нелинейным как по состоянию, так и по параметрам.

Постановка задачи. Требуется оценить параметры μ, λ, ω_0^2 при условии, что все параметры неотрицательные.

Уравнение (8) перепишем в виде

(9) $$\ddot{\alpha} - \mu\lambda\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha + \frac{\mu}{3}\frac{d}{dt}\alpha^3 = u.$$

Применим к уравнению (9) финитное преобразование Фурье на множестве частот (2), получим

(10) $$[(j\omega_k)^2 - \mu\lambda(j\omega_k) + \omega_0^2]A_T(j\omega_k) + (j\omega_k - \mu\lambda)\delta\alpha + \delta\dot{\alpha} + \frac{\mu}{3}\delta\alpha^3 + \\ +\mu\frac{j\omega_k}{3}Q_T(j\omega_k) = U_T(j\omega_k),$$

где

$$\delta\alpha = \alpha(T) - \alpha(0);\ \delta\dot{\alpha} = \dot{\alpha}(T) - \dot{\alpha}(0);\ \delta\alpha^3 = \alpha^3(T) - \alpha^3(0);$$

$$\big(A_T(j\omega_k), Q_T(j\omega_k), U_T(j\omega_k)\big) = \int_0^T (\alpha(t), \alpha^3(t), u(t))e^{-j\omega_k t}dt.$$

Найдем $A_T(j\omega_k)$ из выражения (10) и вычислим невязку

$$\varepsilon(j\omega_k) = A_T^f(j\omega_k) - A_T(j\omega_k),$$

где $A_T^f(j\omega_k)$ – финитное преобразование Фурье наблюдаемого угла атаки $\alpha^f(t)$.

Далее методом наименьших квадратов вычисляются оценки параметров $\hat{\mu}, \hat{\lambda}, \widehat{\omega}_0^2$ и разность граничных условий $\delta\hat{\dot{\alpha}}$:

$$\big(\hat{\mu}, \hat{\lambda}, \widehat{\omega}_0^2, \delta\hat{\dot{\alpha}}\big) = arg \min_{(\mu,\lambda,\omega_0^2,\delta\dot{\alpha})} \sum_{\omega} \varepsilon(-j\omega_k)\varepsilon(j\omega_k).$$

Пример. На рис. 1 и рис. 2 показаны результаты, полученные идентификацией частотно-временным методом (сплошные линии – переходные процессы, полученные на номинальных параметрах; маркером ○ помечены переходные процессы, вычисленные на оценках параметров). Устойчивые переходные процессы получены на начальных условиях $\alpha(0) = 6^0, \dot{\alpha}(0) = 0$; неустойчивые – на начальных условиях $\alpha(0) = 0.1^0, \dot{\alpha}(0) = 0$. Значения оценок параметров совпали с их номинальными значениями $\mu = 0.1,\ \lambda = 2,\ \omega_0^2 = 1$.

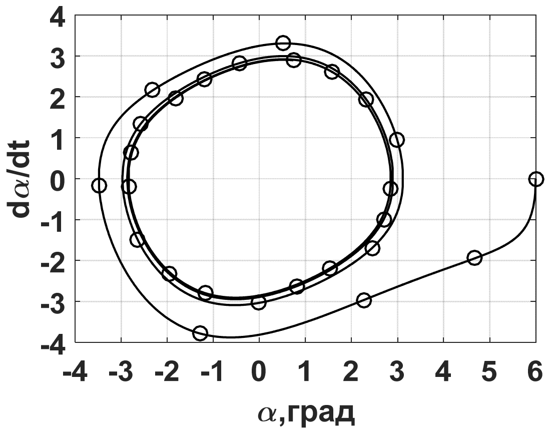

Рис. 1. $\alpha(0) = 6^0, \dot{\alpha}(0) = 0.$

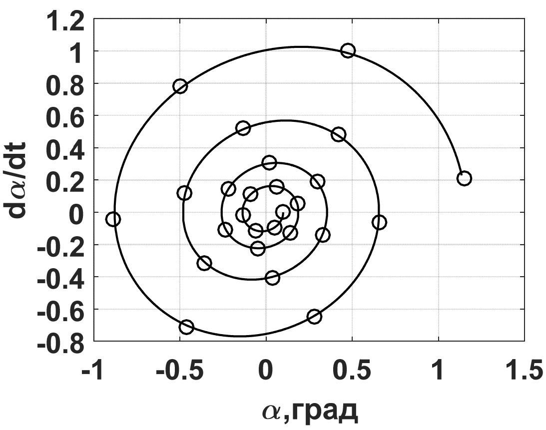

Рис. 2. $\alpha(0) = 0.1^0, \dot{\alpha}(0) = 0.$

4. Заключение

Рассматривается частотно-временной метод идентификации динамических систем с запаздыванием с постоянными параметрами. Установлено свойство разделимости задачи идентификации на задачу оценивания неизвестных параметров и задачу оценивания начальных условий. Оценивание параметров выполняется в частотной области, а начальные условия оцениваются во временной области. Оценки запаздываний и неизвестных параметров вычисляются совместно в частотной области. Рассмотрено применение частотно-временного метода к идентификации дифференциального уравнения осциллятора Ван дер Поля, нелинейного как по состоянию, так и по параметрам.

Список литературы

1. Овчаренко В.Н. Идентификация аэродинамических характеристик воздушных судов по полетным данным. М.: МАИ, 2017.
2. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов / Под ред. Бюшгенса Г.С. М.: Наука: Физматлит, 1998.