

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ МНК-ОЦЕНОК

В.М. Чадеев

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: chavama@ipu.ru

Ключевые слова: идентификация, метод наименьших квадратов (МНК), МНК-оценки, построение математических моделей, ошибки измерений, плотность вероятности, эксперименты, точность оценок, пространство измерений, пространство параметров.

Аннотация: Предложен алгоритм построения плотности вероятности оценок параметров динамических объектов по ограниченному объему экспериментальных данных. Суть алгоритма состоит в переходе из пространства измерений в пространство оценки параметров. Исходные данные – это десятки зашумленных измерений. Пространство параметров – это десятки *тысяч* оценок. Именно этот переход позволяет построить функцию плотности вероятности. Приведен пример.

1. Введение

Современные системы управления крупными промышленными объектами используют прогноз, чтобы учесть будущую ситуацию, т.е. для управления «вперед». Точность предсказывающей модели определяет и точность, а вместе с ней и эффективность работы системы [1].

Полученные в результате идентификации оценки параметров объекта всегда случайны. Точность этих оценок при определенных условиях определяется дисперсией, которая, в свою очередь, зависит от дисперсии прогноза выхода – основного критерия МНК. Однако наиболее полной характеристикой случайной величины, в том числе и оценки параметра, является ее функция плотности распределения вероятности. Как ее получить?

Проблема в том, что для построения функции плотности распределения вероятности требуется на несколько порядков больше данных. Если в объекте необходимо определить m неизвестных параметров, и проведено $N > m$ экспериментов, то МНК дает одну оценку. Ниже будет показано, как из тех же данных можно извлечь информацию для построения функции плотности распределения вероятности.

2. Постановка задачи

Дан динамический объект, структура которого точно известна заранее

$$(1) \quad y(t) = \sum_{i=1}^n h_i y(t-i) + \sum_{i=n+1}^m h_i x(t-i+n),$$

где $y(t)$ – выход объекта, $x(t)$ – вход, t – дискретное время, h_i – неизвестные параметры объекта, n – глубина памяти по выходу, m – общая глубина памяти.

Необходимо по измеренным экспериментальным данным построить функцию плотности вероятности неизвестных параметров объекта h_i .

Измерению доступны только зашумленные данные:

$$\text{выход } v(t) = y(t) + \varepsilon(t) \text{ и вход } z(t) = x(t) + \delta(t),$$

где ε – ошибка измерения выхода, δ – ошибка измерения входа.

Эти данные представлены в виде матрицы

$$(2) \quad G_0(N) = \|z(t) \quad v(t)\|,$$

размером $2 \times N$, где число экспериментов $t = 1, 2, \dots, N$.

Динамический объект (1) может быть представлен как статический объект с одним выходом и m входами. Для этого исходные данные (2) должны быть соответствующим образом преобразованы в матрицу $G(N)$ размером $(m+1) \times N$

$$G(N) = \|v(t-1) \quad v(t-2) \quad \dots \quad v(t-n) \quad z(t-1) \quad z(t-2) \quad \dots \quad z(t-m) \quad v(t)\|.$$

3. Преобразование исходных данных

Экспериментальные данные, полученные с объекта, лежат в пространстве входов-выходов. Данные для построения функции плотности вероятности должны лежать в пространстве параметров. Переход из пространства входов-выходов происходит с помощью процедуры МНК, как показано на рис. 1, а сама процедура будет рассмотрена на примере.

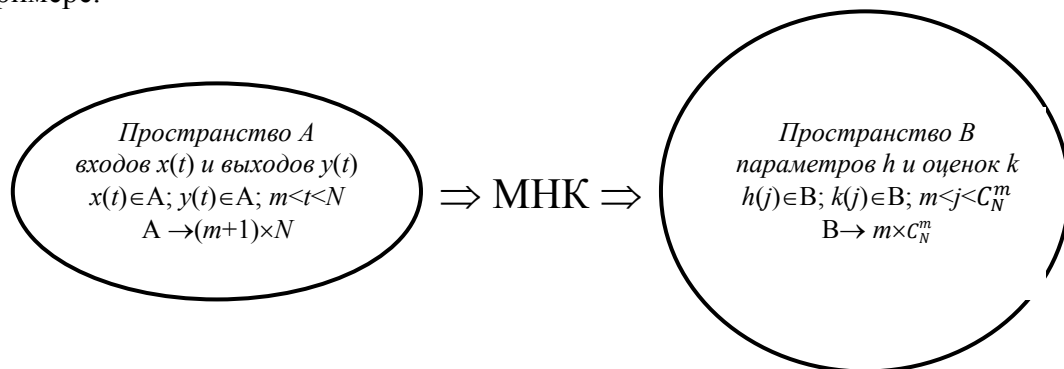


Рис. 1. Переход в пространство параметров.

Для получения данных для построения плотности вероятности, исходные данные из матрицы $G(N)$ должны быть преобразованы. Преобразование состоит в том, что из матрицы $G(N)$ выбираются блоки размером $m \times (m+1)$. Для каждого блока вычисляются МНК-оценки всех m параметров. Всего таких блоков будет C_N^m .

4. Иллюстрационный пример

4.1. Исходные данные

Дан объект известной структуры:

$$(5) \quad y(t) = h_1 \cdot y(t-1) + h_2 \cdot y(t-2) + h_3 \cdot x(t-1),$$

где h_1, h_2, h_3 неизвестные параметры.

Ниже описан специальный алгоритм идентификации, позволяющий получить массив оценок, достаточный для построения функции плотности вероятности.

В результате проведения 40 экспериментов получены значения входов и выходов, показанные на рис. 2.

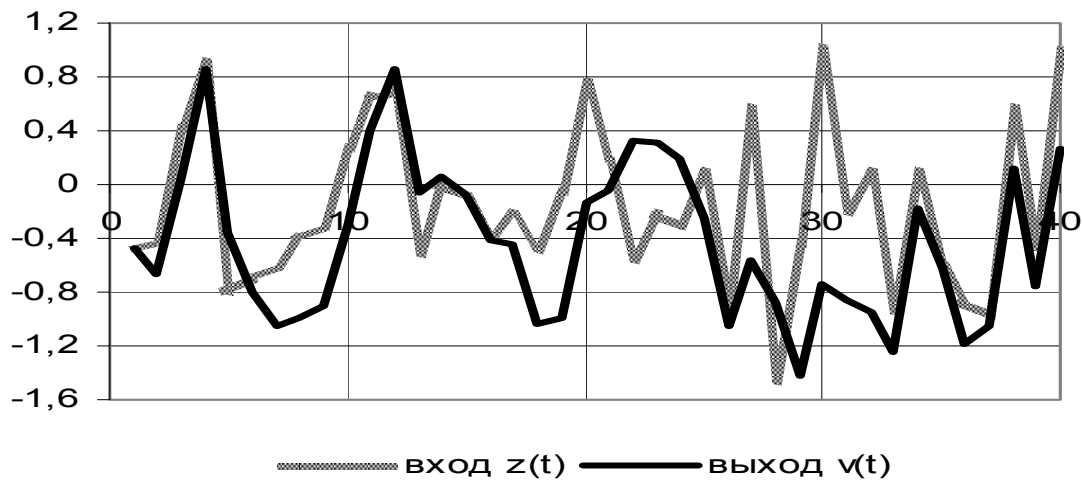


Рис. 2. Исходные экспериментальные данные.

Все используемые в данном примере случайные переменные имеют равномерное распределение в диапазоне от -1 до $+1$. Шум на выходе $\varepsilon(t)$ складывается с выходной переменной $y(t)$ с коэффициентом $n_y=0,000001$. Шум на входе $\delta(t)$ имеет более сложную структуру. Он состоит из двух компонент: компоненты $\delta_1(t)$ с низким уровнем шума ($n_{x1}=0,001$) и компоненты $\delta_2(t)$ с высоким уровнем шума ($n_{x2}=1$).

4.2. МНК-оценки по всем данным

Данные, приведенные на рис. 2, были обработаны с использованием стандартной процедуры МНК. В результате были получены следующие оценки параметров

$$(6) \quad k_{1\text{МНК}} = -0,014 \quad k_{2\text{МНК}} = 0,671 \quad k_{1\text{МНК}} = 0,71.$$

Коэффициент корреляции между измеренным выходом $v(t)$ и его прогнозом по модели с использованием этих оценок $R=0,911$.

4.3. Преобразование данных для динамических объектов

Данные, приведенные на рис. 2, эквивалентны данным в матрице G_2

$$(7) \quad G_2(40) = \begin{bmatrix} z(1) & z(2) & \dots & z(i) & \dots & z(40) \\ v(1) & v(2) & \dots & v(i) & \dots & v(40) \end{bmatrix}.$$

При использовании МНК для идентификации линейных динамических объектов матрица исходных данных (6) должна быть преобразована в форму, удобную для использования процедуры МНК.

$$(8) \quad G_4(40) = \begin{bmatrix} z(0) & v(-1) & v(0) & v(1) \\ z(1) & v(0) & v(1) & v(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z(39) & v(38) & v(39) & v(40) \end{bmatrix}.$$

Целые строки матрицы $G_4(40)$ можно переставлять в любом порядке и в любой последовательности, и от этого результаты идентификации не изменятся. Переставлять какие-либо элементы из одной строки в другую запрещено. Переставлять можно только целые строки.

4.2. Преобразование данных для перехода в пространство параметров

Для перехода в пространство параметров необходимо создать алгоритм отбора всевозможных сочетаний трех строк из матрицы $G_4(40)$. Матрица C содержит 9880 неповторяющихся столбцов. Последний столбец матрицы C содержит номера трех последних строк матрицы G , а именно 38, 39 и 40. При ее выборе будет создан блок B_{9880} .

$$C = \left\| \begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 37 & 38 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 3 & 3 & \dots & 39 & 39 \\ 3 & 4 & \dots & 40 & 4 & 5 & \dots & 40 & 40 \end{array} \right\|$$

В результате перебора всех вариантов образуется 9880 матриц от B_1 до B_{9880} . Последняя матрица имеет вид

$$B_{9880} = \left\| \begin{array}{cccc} z(37) & v(36) & v(37) & v(38) \\ z(38) & v(37) & v(38) & v(39) \\ z(39) & v(38) & v(39) & v(40) \end{array} \right\|.$$

По каждой матрице B_j вычисляется один блок оценок K_j . Каждый блок K содержит оценки трех неизвестных параметров. Последний блок имеет вид

$$K_{9880} = \|k_1(9880) \quad k_2(9880) \quad k_3(9880)\|.$$

Весь массив блоков K_j образует в совокупности основной блок оценок E , который включает все 29640 оценок параметров k_1, k_2, k_3 .

$$E = \|k_1(1) \quad \dots \quad k_1(9880) \quad k_2(1) \quad \dots \quad k_2(9880) \quad k_3(1) \quad \dots \quad k_3(9880)\|.$$

Массив E сортируется по значениям оценок. Для построения функции плотности вероятности отсортированный массив разбивается на группы по значению оценок. По числу оценок в группе строятся графики функции плотности вероятности [2-4].

На рис. 3÷5 приведены примеры.

Процедура разбиения отсортированных данных на группы противоречива. С одной стороны, число точек, используемых для вычисления одной точки функции плотности вероятности оценок параметров, тем больше, чем шире интервал. Чем больше точек, тем выше «лигитимность» оценки плотности вероятности.

С другой стороны, большой интервал группы уменьшает «разборчивость» функции плотности вероятности. На рис. 3 приведена грубая оценка.

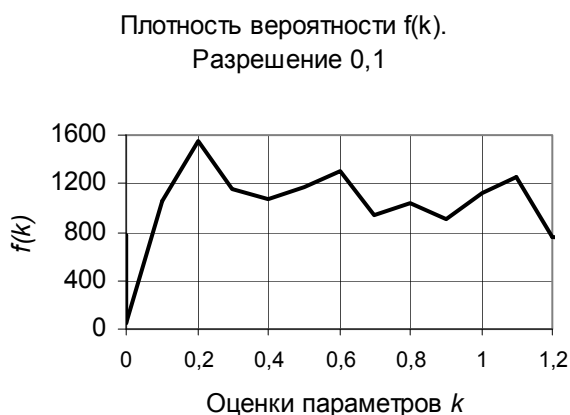
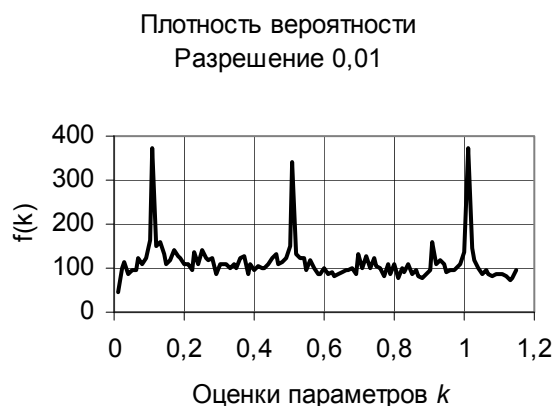


Рис. 3. Грубая функция распределения $f(k)$, построенная с разрешением $\Delta k=0,1$.

По рис. 3 видно, что для построения *одной* точки функции плотности вероятности используется больше тысячи вычисленных оценок, лежащих в интервале 0,1. Внутри интервала 0,1 происходит равновесное усреднение оценок. По этой причине тонкая структура функции плотности вероятности внутри групп исчезает.

Используя те же самые данные (29640 оценок), можно построить функцию плотности вероятности оценок с гораздо большим разрешением. На рис. 4 приведен фрагмент функции плотности вероятности, построенный в том же диапазоне, что на рис. 3, но с разрешением 0,01.



Оценки плотности вероятности с высоким разрешением позволяют с высокой точностью определить и параметры объекта. Вот эти оценки:

Δk	k_1	k_2	k_3
0,1	0,2	0,6	1,1
0,01	0,11	0,51	1,01
0,001	0,101	0,501	1,001
0,0001	0,10005	-	-
МНК	-0,014	0,671	0,71
Истина	0,10	0,50	1,00

Поскольку идентифицировался модельный объект, истина известна точно.

Рис. 4. Функция распределения $f(k)$, построенная с разрешением $\Delta k=0,01$.

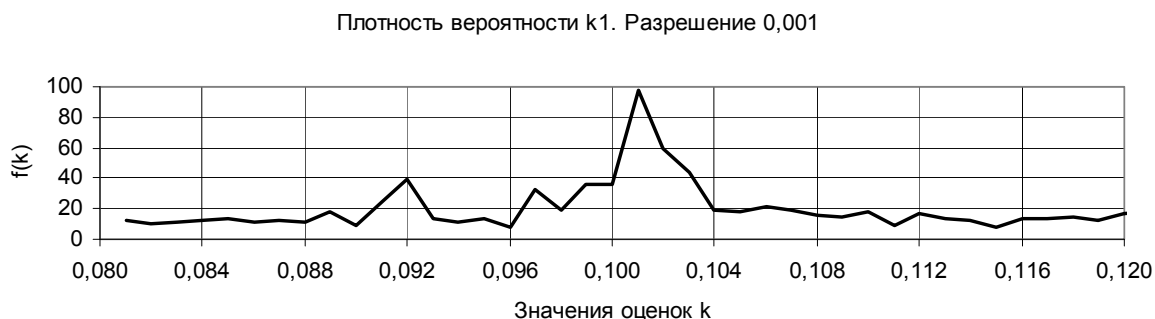


Рис. 5. Функция распределения $f(k)$ построенная с разрешением $\Delta k=0,0001$.

5. Заключение

Разработан алгоритм построения плотности вероятности оценок, полученных в процессе идентификации, что позволяет существенно повысить точность идентификации.

Список литературы

1. Райбман Н.С., Чадеев В.М. О концепции адаптивных систем управления с идентификатором // Автоматика и телемеханика. 1982. № 3.
2. Илюшин В.Б., Чадеев В.М. Алгоритм идентификации динамических объектов с учетом априорной информации об объекте // Автоматика и телемеханика. 2006. № 7.
3. Чадеев В.М., Гусев С.С. Алгоритм идентификации с переходом в пространство параметров // Проблемы управления. 2009. № 1
4. Райбман Н.С., Чадеев В.М. Построение моделей процессов производства. М.: Энергия. 1975.