УДК 519.711

В ПОИСКАХ МИНИМАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ (ЧАСТЬ 1: МЕТОД)

О.Ю. Копысов
Декартов Научен Център
Болгария, 9002, гр. Варна, ж.к. Чайка, бл.185, ап.13
E-mail: iainstitute@inbox.ru

Ключевые слова: объект, модель, экспериментальные данные, класс моделей, ЛСМодель с невязкой, вспомогательная ЛСМодель, идентификация, общее решение задачи идентификации, сингулярное разложение, метод смешанных наименьших и тотальных наименьших квадратов.

Аннотация: в докладе предложена методика получения общего решения задачи идентификации неизвестных параметров и уже на основе полученного общего решения вычисления минимальной реализации и состояния нелинейного динамического объекта.

1. Введение

Любой поиск предполагает наличие некоторого количества претендентов, из которых выбирается необходимый. Для поиска минимальной реализации с помощью идентификации параметров нужно: 1) выбрать класс моделей, содержащий всех претендентов; 2) получить общее решение задачи идентификации параметров и 3) найти в нем частное решение, удовлетворяющее нашим требованиям.

Рассмотрим это на аналитическом примере.

1) Пусть класс моделей имеет вид:

$$\alpha_1\ddot{y}(t) + \alpha_2\dot{y}(t) + \alpha_3 y(t) + \alpha_4 y^3(t) + \alpha_5 w(t) = 0.$$

Этот класс содержит модели, как второго порядка, так и первого, и нулевого.

2) Пусть при подаче на вход объекта $w(t)$=$sin(t)$+$cos(3t)$ на выходе мы получили $y(t)$=$-cos(t)$. Подставим полученные экспериментальные данные в уравнение класса моделей, с учетом того что $cos^3(t)$=0.75 $cos(t)$+0.25 $cos(3t)$, получим: $\alpha_1 cos(t) + \alpha_2\, sin(t) - \alpha_3 cos(t) - \alpha_4[0.75cos(t) + 0.25cos(3t)] + \alpha_5[sin(t) + cos(3t)] = 0$.

Отсюда: $\alpha_1$$-\alpha_3 - 0.75\alpha_4$= 0 (при $cos(t)$), α_2+ α_5=0 (при $sin(t)$), $-0.25\alpha_4$+α_5=0 (при $cos(3t)$). Положим α_5=-1 и получим общее решение вида: α_5=-1, α_4=-4, α_2= 1, $\alpha_1$$-\alpha_3$+3=0.

3) В полученном общем решении есть частное решение с минимальной реализацией: α_1=0, α_2=1, α_3=3, α_4=-4, α_5=-1, или $\dot{y}(t) + 3y(t) - 4y^3(t) = w(t)$.

Теперь все это будем реализовывать в вычислительный алгоритм, работающий в условиях неполных и неточных экспериментальных данных без расчетов производных от дискретных сигналов. Но сначала аналитический метод решения таких задач идентификации параметров.

2. Вспомогательная модель с невязкой

Рассмотрим класс моделей линейной структуры (ЛСМоделей) с невязкой вида:

(1) $$\sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{S} a_{ks}\, f_k^{(S-s)}(t,y,w) = \varepsilon(t),$$

где $\varepsilon(t)$ − невязка; a_{ks} – параметры модели; $f_k^{(S-s)}(t,y,w) = \frac{d^{S-s}}{dt^{S-s}} f_k(t,y,w)$ − соответствующие производные от элементов модели $f_k(t,y,w)$, зависящих от $w(t)$ – измеряемого входа объекта, $y(t)$ − измеряемого выхода объекта и независимой переменной t.

Следуя [1,2] введем вспомогательный вектор состояния $\boldsymbol{z}(t)$ с компонентами вида:

(2) $$\begin{aligned} &z_1(t) = e(t),\\ &z_2(t) = z_1^{(1)}(t) - c_1 z_1(t) - \textstyle\sum_{k=1}^{K} a_{k1} f_k(t,y,w),\\ &z_3(t) = z_2^{(1)}(t) - c_2 z_1(t) - \textstyle\sum_{k=1}^{K} a_{k2} f_k(t,y,w),\\ &\vdots\\ &z_S(t) = z_{S-1}^{(1)}(t) - c_{S-1} z_1(t) - \textstyle\sum_{k=1}^{K} a_{k,S-1} f_k(t,y,w). \end{aligned}$$

Покажем, что $\boldsymbol{z}(t)$ удовлетворяет уравнению вспомогательной модели вида:

(3) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{z}(t) = C\boldsymbol{z}(t) + \sum_{k=1}^{K} \boldsymbol{a}_k f_k(t,y,w),$$

при этом невязка $e(t)$ удовлетворяет уравнению:

(4) $$e^{(S)}(t) - \sum_{s=1}^{S} c_s e^{(S-s)}(t) = \varepsilon(t).$$

Здесь $\boldsymbol{z}(t)$=$[z_1(t),\dots,z_S(t)]'$ – вспомогательный вектор-столбец; $\boldsymbol{a}_k$=$[a_{k1},\dots,a_{kS}]'$ − вектор-столбец параметров при функции $f_k(t,y,w)$ и ее производных;

C – матрица с произвольными коэффициентами c_s (s=1, … , S) вида: $C=\begin{bmatrix} c_1 & 1\ 0 & \dots\ 0\\ c_2 & 0\ 1 & \dots\ 0\\ \vdots & \vdots & \ddots\\ c_{S-1} & 0\ 0 & \dots\ 1\\ c_S & 0\ 0 & \dots\ 0 \end{bmatrix}$.

Подставив первую компоненту вектора состояния во вторую компоненту, получим:

$$z_2(t) = e^{(1)}(t) - c_1 e(t) - \sum_{k=1}^{K} a_{k1} f_k(t,y,w),$$

теперь полученную вторую в третью

$$\begin{aligned} &z_3(t) = [e^{(2)}(t) - c_1 e^{(1)}(t) - \textstyle\sum_{k=1}^{K} a_{k1} f_k^{(1)}(t,y,w)] - c_2 e(t) -\\ &\textstyle\sum_{k=1}^{K} a_{k2} f_k(t,y,w)=\\ &= e^{(2)}(t) - c_1 e^{(1)}(t) - c_2 e(t) - \textstyle\sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{2} a_{ks}\, f_k^{(2-s)}(t,y,w), \end{aligned}$$

и так далее и полученную (S−1)-ую компоненту в S-тую. В итоге получим

$$\begin{aligned} &z_S(t) = e^{(S-1)}(t) - c_1 e^{(S-2)}(t) - \dots - c_{S-1} e(t) -\\ &\textstyle\sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{S-1} a_{ks}\, f_k^{(S-1-s)}(t,y,w). \end{aligned}$$

Продифференцируем полученное выражение

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z_S(t) =\\ &[e^{(S)}(t) - c_1 e^{(S-1)}(t) - \dots - c_{S-1} e^{(1)}(t)] - \{\textstyle\sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{S-1} a_{ks}\, f_k^{(S-s)}(t,y,w)\}=\\ &=[\varepsilon(t) + c_S e(t)]_{\text{из (4)}} - \{\varepsilon(t) - \textstyle\sum_{k=1}^{K} a_{kS} f_k^{(S-S)}(t,y,w)\}_{\text{из (1)}}=\\ &=c_S z_1(t) + \textstyle\sum_{k=1}^{K} a_{kS} f_k(t,y,w), \end{aligned}$$

что и доказывает наше утверждение.

Запишем решение задачи Коши для вспомогательной модели с начальными условиями $\boldsymbol{z}(0)$=$[z_{10},\dots,z_{S0}]'$ на отрезке наблюдения $\boldsymbol{t}$=[0, … , t, …] в виде:

(5) $$\boldsymbol{z}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{z}(0) + \sum_{k=1}^{K} R_k(t)\boldsymbol{a}_k\,,$$

где матрицы $\Phi(t)$ и $R_k(t)$ являются решениями следующих задач Коши:

(6) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi(t) = C\Phi(t), \quad \Phi(0) = E;$$

(7) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_k(t) = CR_k(t) + f_k(t, y, w)E, \quad R_k(0) = 0;$
здесь E – единичная матрица. Все матрицы имеют размер $S\times S$.

Вспомним, что $z_1(t)$=$e(t)$, тогда первая строка решения $\boldsymbol{z}(t)$ (5) примет вид:

(8) $\sum_{s=1}^{S} z_{s0}\phi_{1s}(t) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{s=1}^{S} a_{ks}\, r_{k,1s}(t) = e(t),$
здесь $\phi_{1s}(t)$, $r_{k,1s}(t)$ – элементы первых строк матриц $\Phi(t)$, $R_k(t)$ соответственно.

Таким образом, мы получили вспомогательную ЛСМодель с невязкой $e(t)$, причем кроме параметров a_{ks}, в нее входят координаты z_{s0} вектора начального состояния $\boldsymbol{z}(0)$. Замечу, что полученная вспомогательная модель не зависит от измеряемых и/или вычисляемых функций $f_k(t, y, w)$, а состоит из $r_{k,1s}(t)$ – решений задач Коши, можно сказать, результатов фильтрации функций $f_k(t, y, w)$ линейным фильтром (7).

Из изложенного следует следующий метод идентификации параметров не требующий вычисления производных: 1) по измерениям элементов объекта вычисляются $f_k(t, y, w)$ и решаются задачи Коши для матриц $\Phi(t)$ и $R_k(t)$; затем 2) решается эквивалентная задача идентификации посредством вспомогательной ЛСМодели с невязкой.

Важно, что все решения задачи идентификации параметров, полученные по вспомогательной ЛСМодели, являются решениями исходной задачи и наоборот.

Приведу без доказательства, необходимые для дальнейших расчетов, свойства матриц $\Phi(t)$ и $R_k(t)$ [2]:

(9) $\boldsymbol{\phi}_{s-1}(t)= C\cdot\boldsymbol{\phi}_s(t)$; $\boldsymbol{r}_{k,s-1}(t)= C\cdot\boldsymbol{r}_{k,s}(t)$.
Здесь $\boldsymbol{\phi}_i(t)$ и $\boldsymbol{r}_{k,i}(t)$ – i-тые столбцы соответствующих матриц. Отсюда следует, что для расчета матриц $\Phi(t)$ и $R_k(t)$ необходимо решить задачи Коши для последних столбцов $\boldsymbol{\phi}_S(t)$ и $\boldsymbol{r}_{k,S}(t)$ этих матриц, а остальные столбцы получать умножением на матрицу C.

Продемонстрируем предложенный метод на примере из введения. Пример специально сконструирован так, чтобы можно было решить задачи Коши аналитически.

Класс моделей (1) будет иметь вид:

$$a_{11}\ddot{y}(t) + a_{12}\dot{y}(t) + a_{13}y(t) + a_{23}y^3(t) + a_{33}w(t) = 0,$$

здесь K=3, S=3, $f_1(t, y, w)$=$y(t)$, $f_2(t, y, w)$=$y^3(t)$, $f_3(t, y, w)$= $w(t)$, a_{21}=a_{22}=0, a_{31}=a_{32}=0, $w(t)$=$sin(t)$+$cos(3t)$, $y(t)$=$-cos(t)$.

Вспомогательный вектор состояния (2) имеет вид:

$$z_1(t) = e(t),$$
$$z_2(t) = z_1^{(1)}(t) - c_1 z_1(t) - a_{11}y(t),$$
$$z_3(t) = z_2^{(1)}(t) - c_2 z_1(t) - a_{12}y(t).$$

Возьмем c_1=c_2=c_3=0, тогда задача Коши (7) для третьего последнего столбца матрицы $R_1(t)$ будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix}\dot{r}_{1,13}\\ \dot{r}_{1,23}\\ \dot{r}_{1,33}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_{1,13}\\ r_{1,23}\\ r_{1,33}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ y\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}r_{1,13}(0)\\ r_{1,23}(0)\\ r_{1,33}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \text{ или } \begin{aligned}\dot{r}_{1,13} &= r_{1,23}(t),\\ \dot{r}_{1,23} &= r_{1,33}(t),\\ \dot{r}_{1,33} &= -cos(t).\end{aligned}$$

В обратном порядке решая каждое уравнение с учетом нулевых начальных условий, получим: $r_{1,33}$=$-sin(t)$, $r_{1,23}$=$cos(t)-1$, $r_{1,13}$=$sin(t)- t$. И с учетом свойства матриц $\Phi(t)$ и $R_k(t)$ (9) получим $\boldsymbol{r}_{1,2}(t)$= $C\cdot\boldsymbol{r}_{1,3}(t)$, $\boldsymbol{r}_{1,1}(t)$= $C\cdot\boldsymbol{r}_{1,2}(t)$. В итоге

$$R_1(t)=\begin{bmatrix}-sin(t) & cos(t)-1 & sin(t)- t\\ 0 & -sin(t) & cos(t)-1\\ 0 & 0 & -sin(t)\end{bmatrix}. \text{ Аналогично } \Phi(t)=\begin{bmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2}\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

С учетом того что $cos^3(t)$=$\frac{3}{4}cos(t)$+$\frac{1}{4}cos(3t)$, получим задачу Коши для расчета последней координаты последнего столбца матрицы $R_2(t)$ вида:

$$\dot{r}_{2,33}=y^3(t)=-cos^3(t)=-\tfrac{3}{4}cos(t) - \tfrac{1}{4}cos(3t),\ r_{2,33}(0)=0. \text{ Тогда}$$

$r_{2,11}= r_{2,22}= r_{2,33}=-\frac{3}{4}sin(t) - \frac{1}{4\cdot3}sin(3t),$
$r_{2,12}= r_{2,23}= \frac{3}{4}[cos(t) - 1] + \frac{1}{4\cdot3\cdot3}[cos(3t) - 1],$
$r_{2,13}= \frac{3}{4}sin(t) - \frac{3}{4}t + \frac{1}{4\cdot3\cdot3\cdot3}sin(3t) - \frac{1}{4\cdot3\cdot3}t.$

Решим задачу Коши для последней координаты последнего столбца матрицы $R_3(t)$:

$\dot{r}_{3,33}= w(t) = sin(t)+cos(3t),\ r_{3,33}(0) = 0.$ Отсюда
$r_{3,11}= r_{3,22}= r_{3,33}=-cos(t) + 1 + \frac{1}{3}sin(3t),$
$r_{3,12}= r_{3,23}=-sin(t) + t - \frac{1}{3\cdot3}cos(3t) + \frac{1}{3\cdot3},$
$r_{3,13}= cos(t) - 1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3\cdot3\cdot3}sin(3t) + \frac{1}{3\cdot3}t.$

Так как a_{21}=a_{22}=a_{31}=a_{32}=0, вспомогательная ЛСМодель будет иметь вид:

$$z_{10}\phi_{11}(t) + z_{20}\phi_{12}(t) + z_{30}\phi_{13}(t) + a_{11}r_{1,11}(t) + a_{12}r_{1,12}(t) + a_{13}r_{1,13}(t) + a_{23}r_{2,13}(t) + a_{33}r_{3,13}(t) = e(t).$$

Будем искать решение с минимальной невязкой $e(t)$=$0(t)$, что гарантирует получение невязки исходной ЛСМодели $\varepsilon(t)$=0, так как из (4) $e^{(3)}(t)$=$\varepsilon(t)$. Тогда

$$z_{10}\cdot 1 + z_{20}t + z_{30}\frac{1}{2}t^2 + a_{11}[-sin(t)] + a_{12}[cos(t) - 1] + a_{13}\,[sin(t) - t] + a_{23}\,[\tfrac{3}{4}sin(t) - \tfrac{3}{4}t + \tfrac{1}{4\cdot3\cdot3\cdot3}sin(3t) - \tfrac{1}{4\cdot3\cdot3}t] + a_{33}[cos(t) - 1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3\cdot3\cdot3}sin(3t) + \frac{1}{3\cdot3}t] = 0.$$

Отсюда получим:

при 1: $z_{10} - a_{12} - a_{33} = 0,$
при t: $z_{20} - a_{13} - a_{23}[\frac{3}{4} + \frac{1}{4\cdot3\cdot3}] + \frac{1}{3\cdot3}a_{33} = 0,$
при $\frac{t^2}{2}$: $z_{30} + a_{33} = 0,$
при $sin(t)$: $-a_{11} + a_{13} + \frac{3}{4}a_{23} = 0,$
при $cos(t)$: $a_{12} + a_{33} = 0,$
при $sin(3t)$: $\frac{1}{4\cdot3\cdot3\cdot3}a_{23} - \frac{1}{3\cdot3\cdot3}a_{33} = 0.$

Как и во введении возьмем a_{33}=-1 и получим общее решение: a_{23}=-4, a_{12}=1, $a_{11} - a_{13} + 3 = 0$, которое совпадает с общим решением, полученным во введении. Кроме того, при a_{11}=0, получим a_{13}=3, z_{10}=0, z_{20}=0, z_{30}=1. Легко убедиться, что любое другое частное решение удовлетворяет уравнениям вспомогательной и основной ЛСМоделей.

Кроме того, подставив в (5) вычисленные параметры и матрицы получим, что $z_1(t)$=$0(t)$, $z_2(t)$=$0(t)$, $z_3(t)$=$cos(t)$. Далее из (3) получим $\frac{d}{dt}z_1(t)$=$0(t)$, $\frac{d}{dt}z_2(t)$=$0(t)$, $\frac{d}{dt}z_3(t)$=$-sin(t)$. Теперь из (2) $y(t)$=$-z_3(t)/a_{12}$, отсюда $\frac{d}{dt}y(t)$=$-\frac{d}{dt}z_3(t)/a_{12}$= $sin(t)$ и без дифференцирования $y(t)$ мы рассчитали его производную.

Ясно, что в алгоритме мы не сможем рассчитать общее решение задачи идентификации таким способом, ведь после решения задач Коши численными методами мы будем иметь только дискретные значения матриц $\Phi(t)$ и $R_k(t)$. Однако аналитический пример играет значительную роль во время отладки алгоритма.

3. Общие решения алгебраических уравнений

Следуя стратегии метода смешанных наименьших и тотальных наименьших квадратов (mixed LS-TLS) [3] запишем уравнение вспомогательной ЛСМодели в виде:

(10) $$P\boldsymbol{\beta} + R\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \text{ или } [P \quad | \quad (R^0 + \Delta R)]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

здесь в P собраны все столбцы известные точно, а в R=R^0+ΔR — неточно.

Пусть в примере $w(t)$ известно точно, а $y(t)$ – неточно, тогда:

$$P = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t_1) & \phi_{12}(t_1) & \phi_{13}(t_1) & r_{3,13}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{11}(t_m) & \phi_{12}(t_m) & \phi_{13}(t_m) & r_{3,13}(t_m) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} z_{10} \\ z_{20} \\ z_{30} \\ a_{33} \end{bmatrix};$$

$$R = \begin{bmatrix} r_{1,11}(t_1) & r_{1,12}(t_1) & r_{1,13}(t_1) & r_{2,13}(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{1,11}(t_m) & r_{1,12}(t_m) & r_{1,13}(t_m) & r_{2,13}(t_m) \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}.$$

При числе строк больше чем число столбцов QR-разложение матрицы полного ранга P будет иметь вид: P=$Q\begin{bmatrix} T \\ O \end{bmatrix}$, здесь Q – ортогональная, T – невырожденная квадратная верхняя треугольная и O – нулевая матрицы. Умножим (10) на Q', тогда:

$$Q' \cdot [P \quad | \quad (R^0 + \Delta R)] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = Q' \cdot \mathbf{0} \text{ или } \left(\begin{bmatrix} T & R1 \\ O & R2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & O \\ O & \Delta R2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

и мы получили два уравнения

$$(R2 + \Delta R2)\, \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \text{ и } T\boldsymbol{\beta} + R1\, \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}.$$

Для первого мы будем искать общее решение методом тотальных наименьших квадратов (Total LS) [4] и нужное нам частное решение $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$ подставлять во второе уравнение, которое имеет решение $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$=$-T^{-1}\, R1\, \widehat{\boldsymbol{\alpha}}$.

Для (m×n)-матрицы ($R2$+$\Delta R2$) первого уравнения получим сингулярное разложение ($R2$+$\Delta R2$)=$U\,S\,V'$, здесь U и V – ортогональные матрицы, а S – диагональная матрица, содержащая сингулярные числа s_i. Если $s_1 \geq \cdots \geq s_r > s_{r+1} = \cdots = s_n$, то любая нормированная линейная комбинация столбцов $\boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ матрицы V дает решение уравнения с минимальной нормой Фробениуса ошибки $\Delta R2$, причем [4]

$$\min_{rank(R2+\Delta R2)<n} \|\Delta R2\|_F = s_n.$$

Другими словами, столбцы $\boldsymbol{v}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ являются базисом общего решения задачи идентификации параметров. А выбирая нужную нам линейную комбинацию, мы получим решения с необходимыми свойствами. Надо учитывать, что на практике мы не можем рассчитывать на получение точного равенства последних сингулярных чисел, поэтому равенства s_{r+1}=...=s_n надо понимать приближенно.

В примере n=4 и даже в отсутствие неточностей сигнала $y(t)$ были получены

```
singular_value =
 5.2296e+000  1.7437e-001  1.1044e-006  4.4859e-007.
```

Видно, что последние два сингулярных числа, конечно не равны друг другу, но намного меньше двух первых и взяв их линейную комбинацию $\boldsymbol{v}$=$v_{13}\boldsymbol{v}_4 - v_{14}\boldsymbol{v}_3$, а в качестве частного решения $\widehat{\boldsymbol{\alpha}}$= $\boldsymbol{v}/v_2$, получим a_{11}=0, a_{12}=1.

Список литературы

1. Копысов О.Ю., Прокопов Б.И., Пупков К.А. Идентификация параметров и состояния одного класса нелинейных систем // Problems of Control and Information Theory. Издательство Академии наук Венгрии. 1982. Vol. 11(3). P. 205-216.
2. Копысов О.Ю. Идентификация посредством моделей линейной структуры. 2-ое издание. Издателство Декартов Научен Център, Варна, 2013. 425 с. ISBN 978-954-92807-4-6.
3. Van Huffel S., Vandewalle J. The Total Least-Squares Problem: Computational Aspects and Analysis. SIAM, Philadelphia/PA, 1991. 300 p.
4. Golub G., Van Loan C. An analysis of the Total Least-Squares problem // SIAM Journal on Numerical Analysis. 1980. Vol. 17, No. 6. P. 883-893.