УДК 519.71

НОРМИРОВАНИЕ АНИЗОТРОПИЙНОЙ НОРМЫ СЛУЧАЙНОГО ВЕКТОРА

К.Р. Чернышев
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: myau@ipu.ru

Ключевые слова: аксиомы Реньи, анизотропийная норма, взаимная информация, дивергенция, меры зависимости, случайный вектор.

Аннотация: В рамках анизотропийной теории управления (Anisotropy of Signals and the Entropy of Linear Stationary Systems / I.G. Vladimirov, A.P. Kurdjukov, A.V. Semyonov // Doklady Math. 1995. Vol. 51. P. 388-390) обращение средней анизотропийной нормы системы в нуль соответствует H_2-теории, а обращение в бесконечность – H_∞. При этом естественным образом возникает вопрос, с какого значения анизотропийной нормы ее следует считать близкой к нулю или близкой к бесконечности, а какие значения не «близки» ни к нулю, ни к бесконечности. В настоящей работе предлагается метод построения нормированной (то есть принимающей значения в единичном интервале) анизотропийной нормы случайного *вектора* как выбор соответствующего отображения положительной полуоси в единичный интервал.

В основополагающей работе [1] введены анизотропийные нормы случайного вектора и линейных систем. Как следствие, были получены многочисленные значимые результаты в соответствующей области теории управления, например [2-11]. Цель исследований [1-11] – объединить в рамках единого подхода к теории оптимального управления особенности как H_2-, так и H_∞-методов, основанных на H_2- и H_∞-нормах соответственно в соответствующих пространствах Харди матричных передаточных функций. Первая из них, теория стохастической фильтрации и управления Винера-Хопфа-Калмана, предполагает белошумность входного процесса, в то время как вторая (H_∞-теория управления) рассматривает вход как детерминированную квадратично суммируемую последовательность [2].

Обращение средней анизотропийной нормы системы в нуль соответствует H_2-теории, а обращение в бесконечность соответствует H_∞-теории. При этом естественным образом возникает вопрос, с какого значения анизотропийной нормы ее следует считать близкой к нулю или близкой к бесконечности, а какие значения не «близки» ни к нулю, ни к бесконечности. Анизотропийнай теория строится исходя из основополагающего определения анизотропийной нормы случайного *вектора*. В настоящей работе предлагается метод построения нормированной (то есть принимающей значения в единичном интервале) анизотропийной нормы случайного *вектора* как выбор соответствующего отображения положительной полуоси в единичный интервал. Нормирование анизотропийной нормы может рассматриваться как ответ на вопрос об интерпретации тех или иных ее значений, подобно тому, как это имеет место в случае вероятностных мер.

Такое нормирование легко достигается с помощью какого-либо непрерывного монотонного отображения $[\,0;\ \infty\,) \to [\,0;\ 1\,]$. Но таких отображений бесконечно много (некоторые примеры приведены на рис. 1), и соответственно возникает вопрос о том, существую ли «естественным образом» обоснованные критерии выбора требуемого нормирующего отображения?

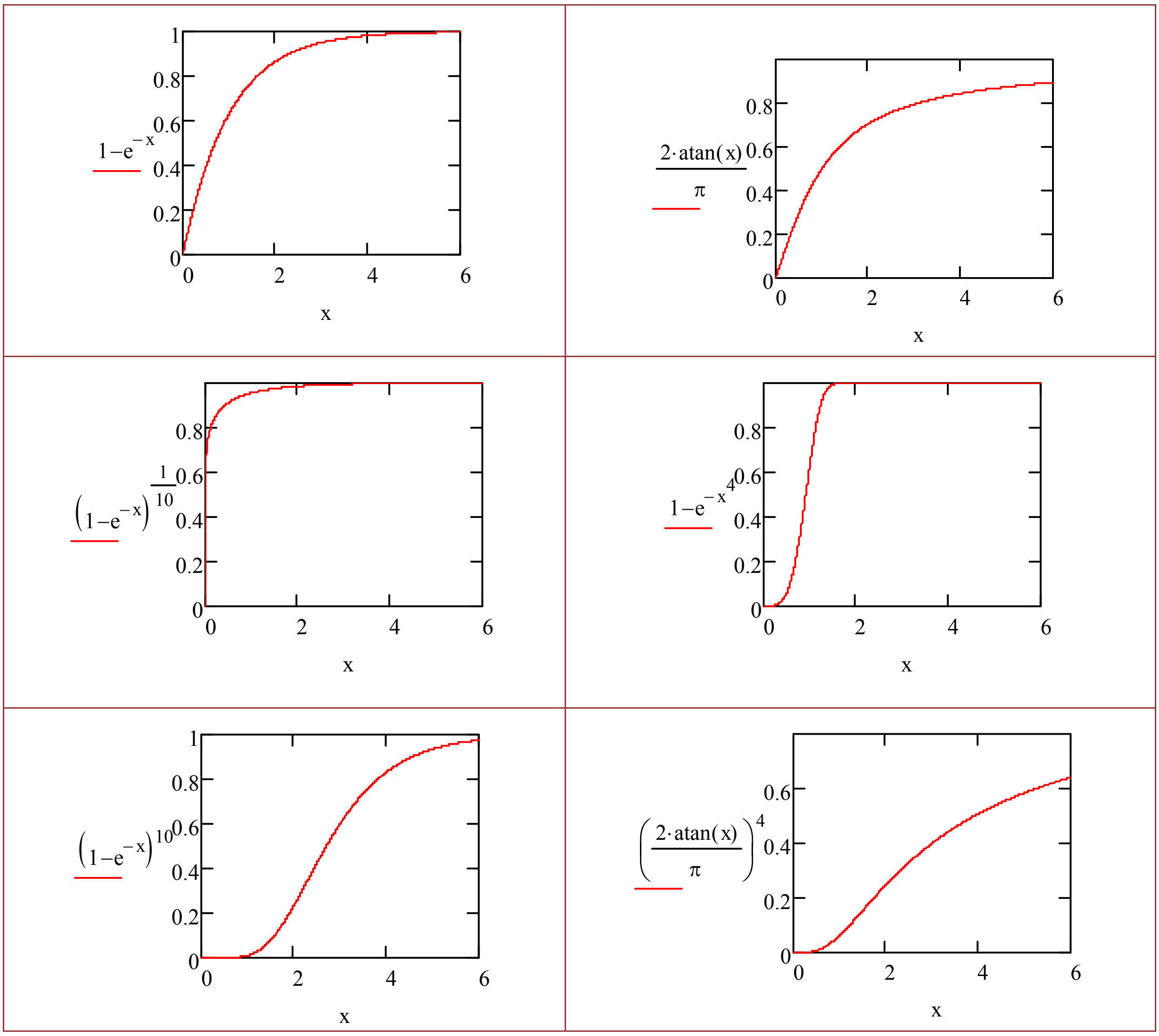


Рис. 1. Примеры отображений $[\ 0;\ \ \infty\ ) \to [\ 0;\ \ 1\ ]$.

Выбор алгоритма построения требуемого нормирующего отображения основан на следующих рассуждениях. 1) Анизотропийная норма случайного *вектора* представляет собой меру дивергенции между распределением исследуемого вектора и соответствующего гауссовского вектора. 2) В свою очередь, любая мера дивергенции становится мерой зависимости между парой случайных векторов (величин), когда одна из плотностей является их совместной плотностью распределения вероятностей, а вторая плотность – произведением их маргинальных плотностей распределения вероятностей. 3) И, наконец, для мер зависимости случайных величин известна аксиоматика А. Реньи [12], в соответствии с которой в случае совместного гауссовского распределения случайных величин, их мера зависимости (по А. Реньи) должна совпадать с модулем коэффициента корреляции.

Таким образом, алгоритм построения преобразования положительной полуоси в единичный интервал для построения нормированной анизотропийной нормы случайного вектора состоит в следующем:

1) Для меры дивергенции $D(f\|g)$ (на основе которой строится анизотропийная норма) построить соответствующую меру зависимости, $D(f\|g) = D(p_{xy}\|p_x \cdot p_y) = M_{XY}$, между случайными величинами X и Y с совместной $p_{xy}(x,y)$ и маргинальными $p_x(x)$ и $p_y(y)$ плотностями распределения вероятностей.

2) Вычислить $D(p_{xy}\|p_x \cdot p_y) = M_{XY}$ для совместной гауссовской плотности распределения вероятностей с коэффициентом корреляции $\boldsymbol{corr}(X,Y)$).

3) Выразить полученной выражение как функцию от модуля коэффициента корреляции, $\mathrm{M}_{XY} = \Theta_{\mathrm{M}_{XY}}(\ |\mathbf{corr}(X,Y))|\ )$, *и обратить эту функцию.*

4) Полученное выражение, $\Theta^{-1}_{M_{XY}}(M_{XY})$, (как функция от исходной меры зависимости M_{XY}) определяет требуемое отображение $[\ 0;\ \ \infty\ ) \to [\ 0;\ \ 1\ ]$ *для анизотропийной нормы, основанной на данной мере дивергенции $D(f\|g)$: $\Theta^{-1}_{M_{XY}}(D(f\|g))$.*

Применение данного алгоритма к анизотропийной норме [1] $\mathbf{A}[\mathbf{z}]$ случайного *вектора* $\mathbf{z}$ приводит к следующему результату. Поскольку $\mathbf{A}[\mathbf{z}]$ [1] представляет собой меру дивергенции Кульбака-Лайблера, то соответствующая такой мере дивергенции мера зависимости является взаимной информацией Шеннона, а нормирующее преобразование в соответствии с данным алгоритмом имеет вид

(1) $$\mathbf{A}^{\mathbf{norm}}[\mathbf{z}] = \sqrt{1 - \exp\{-2 \cdot \mathbf{A}[\mathbf{z}]\}}.$$

Пример 1. Пусть двумерный случайный вектор $\mathbf{z} = (z_1,\ z_2)^{\mathrm{T}}$ имеет двумерную плотность распределения вероятностей из класса Фреше [13]:

$$f^F(\mathbf{z}) = f^F(z_1, z_2) = \frac{1}{3\pi\sqrt{3}}\left\{e^{-\frac{3}{2}({z_1}^2+{z_2}^2+z_1z_2)} + 2e^{-\frac{2}{3}({z_1}^2+{z_2}^2-z_1z_2)}\right\} =$$
$$= \frac{e^{-\frac{z_1^2+z_2^2}{2}}}{2\pi}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^k}{3\cdot 2^k}P_k^H(z_1)\,P_k^H(z_2)\right\} =$$
$$= \frac{e^{-\frac{z_1^2+z_2^2}{2}}}{2\pi}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}c_kP_k^H(z_1)\,P_k^H(z_2)\right\},$$

где

$$P_k^H(z) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k!}}e^{z^2/2}\frac{d^k}{dz^k}e^{-z^2/2} = \frac{1}{\sqrt{k!}}\left\{z^k - \frac{k(k-1)}{1!\cdot 2} + \cdots\right\}$$

– полиномы Эрмита. Маргинальные плотности $f^F(z_1,z_2)$ являются лапласовскими. При этом коэффициент корреляции между компонентами данного вектора равен $1/6$, но его значение не в полной мере характеризует зависимость компонент данного случайного вектора, поскольку максимальный коэффициент корреляции для такой плотности распределения вероятностей равен $1/4$. На рис. 2 приведен вид плотности $f^F(z_1,z_2)$ в сравнении с двумерной гауссовской плотностью со скалярной (в данном случае, единичной) ковариационной матрицей.

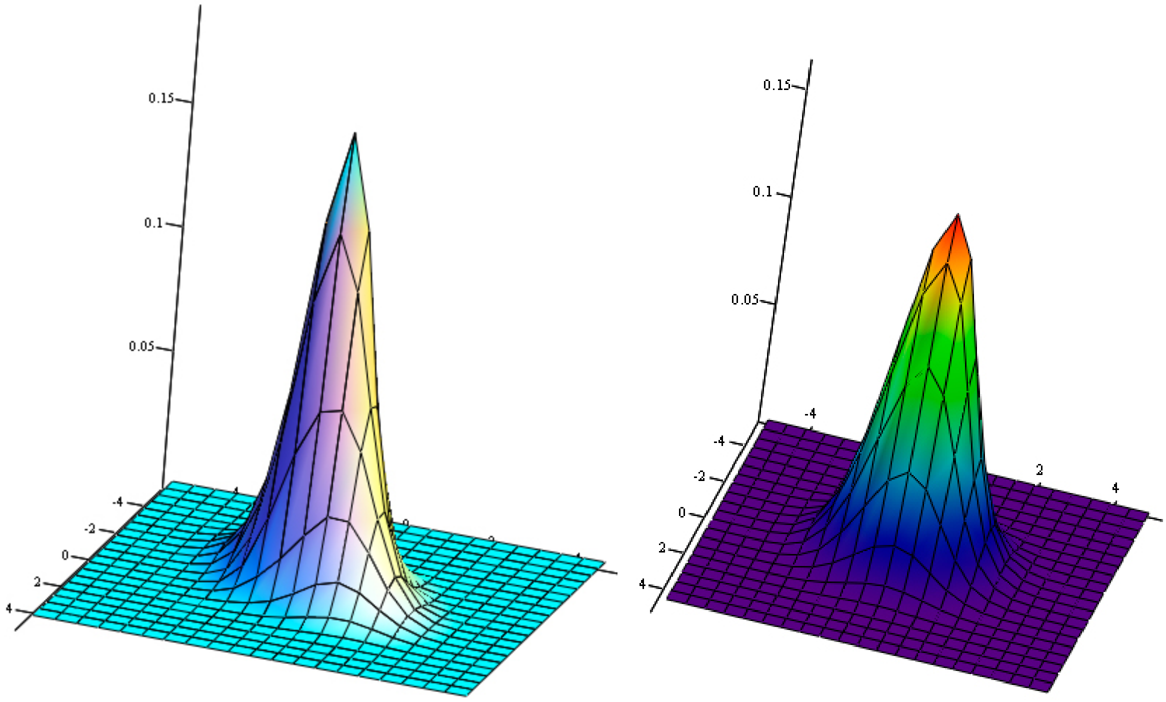


Рис. 2. Плотность распределения вероятностей $f^F(z_1, z_2)$ из класса Фреше (слева) и двумерная гауссовская плотность распределения вероятностей со скалярной (единичной) ковариационной матрицей.

Определение анизотроприйной нормы n-мерного случайного вектора $\mathbf{z}$ с плотностью распределения $p(\mathbf{z})$ [1] основано на применении дивергенции Кульбака-Лайблера и имеет вид

$$\mathbf{A}[\mathbf{z}] = \min_{\nu>0} \int_{R^n} p(\mathbf{z}) \ln \frac{p(\mathbf{z})}{G_\nu(\mathbf{z})} d\mathbf{z},$$

где $G_\nu(\mathbf{z})$ – плотность распределения n-мерного гауссова случайного вектора со скалярной ковариационной матрицей, $\nu \cdot \mathbf{I}_n$, где $\mathbf{I}_n$ – единичная $n \times n$-матрица.

Анизотропийная норма [1] $\mathbf{A}[\mathbf{z}]$ данного случайного вектора равна 0,56356, что можно интерпретировать как априорную (поскольку речь идет об анизотропийной норме именно случайного *вектора*) количественную характеристику, указывающую в существенно большей степени на близость к H_2-теории, чем к H_∞-теории (в условиях, когда значения анизотропийной нормы – вся положительная полуось). Но, в то же время, нормированная анизотропийная норма данного случайного вектора имеет вид (1) и равна 0,82222, что, соответственно, исключает близость к H_2-теории, и в гораздо большей степени дает основание рассматривать близость к H_∞-теории (в условиях, когда значения нормированной анизотропийной нормы – единичный интервал).

Пример 2. Пусть двумерный случайный вектор $\mathbf{z} = (z_1,\ z_2)^{\mathrm{T}}$ имеет двумерную плотность распределения вероятностей из класса О.В. Сарманова [14]

Этот класс определяется ПРВ $p_\lambda(z_1, z_2)$, зависящими от параметра λ,

(2) $$p_{12,\lambda}(z_1, z_2) = p_1(z_1)p_2(z_2)\big(1 + \lambda\phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\big),$$

с маргинальными плотностями $p_1(z_1)$, $p_2(z_2)$, и с функциями $\phi_1(z_1)$, $\phi_2(z_2)$, удовлетворяющими условиям:

$$\int p_1(z_1)\phi_1(z_1)dz_1 = 0, \int p_2(z_2)\phi_2(z_2)dz_2 = 0,\ 1 + \lambda\phi_1(z_1)\phi_2(z_2) \geq 0.$$

Для таких плотностей и коэффициент корреляции, и условные математические тождественно равны нулю:

$$\mathbf{corr}(z_1, z_2) \equiv 0; \mathbf{E}\left({}^{z_2}/_{z_1}\right) \equiv \mathbf{E}\left({}^{z_1}/_{z_2}\right) \equiv 0,$$

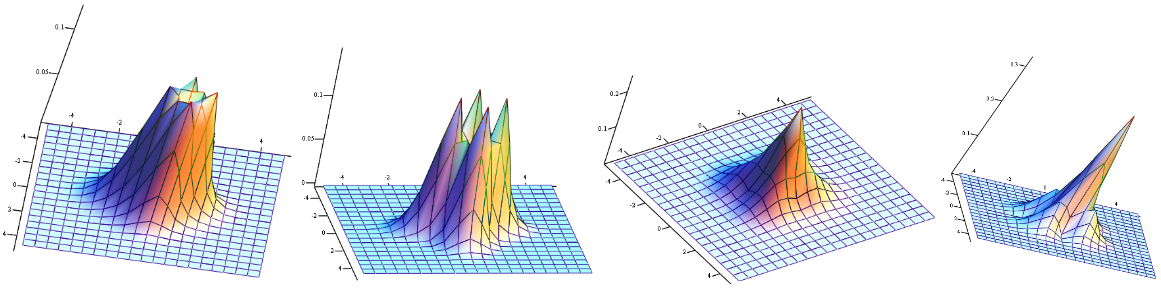
где$\mathbf{corr}(\cdot,\cdot)$ – коэффициент корреляции, $\mathbf{E}(\cdot/\cdot)$ – условное математическое ожидание.

Как частный случай плотности (2) представляет интерес в рамках предмета настоящего исследования рассмотреть соответствующую плотность с маргинальными лапласовскими распределениями, а именно,

$$p_{12,\lambda}(z_1, z_2) = \frac{e^{-\frac{z_1^2+z_2^2}{2}}}{2\pi}\left(1 + \lambda\left(2e^{-\frac{3}{2}z_1^2} - 1\right)\left(2e^{-\frac{3}{2}z_2^2} - 1\right)\right), \quad (3)$$

где $-1 \le \lambda \le 1$.

Несмотря на свою скалярную природу, параметр λ значительно влияет на форму плотности (3) в целом; и на рис. 3 представлена плотность (3) при некоторых значениях этого параметра.



$\lambda = -1$ $\lambda = -1/2$ $\lambda = 1/2$ $\lambda = 1$

Рис. 3. Плотность распределения вероятностей $p_\lambda(z_1, z_2)$ (3) для некоторых значений параметра λ.

Соответственно, на рис. 4 представлены значения анизотропийной нормы и нормированной анизотропийной нормы двумерного случайного вектора как функции параметра λ плотности (3). Их соотношение такое же, как и в примере 1. То есть достаточно малые значения анизотропийной нормы, своего рода, дезавуируются соответствующими значениями нормированной анизотропийной нормы.

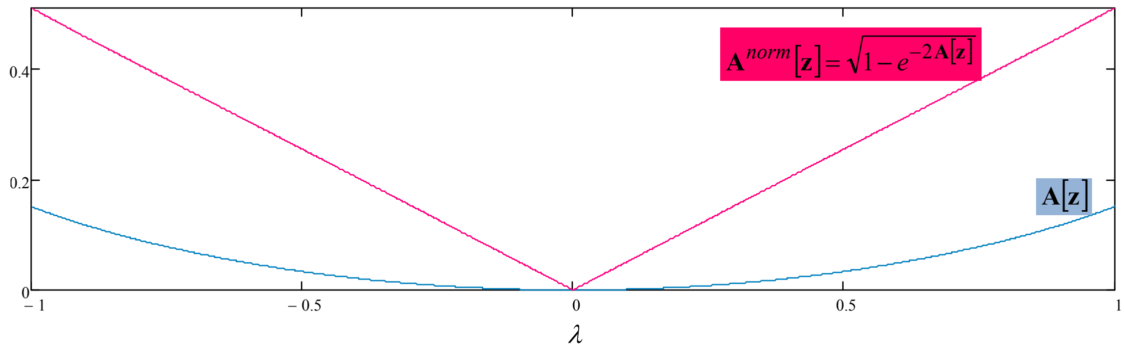


Рис. 4. Соответствие значений ненормированной $\mathbf{A}[\mathbf{z}]$ и нормированной $\mathbf{A}^{norm}[\mathbf{z}] = \sqrt{1 - e^{-2\mathbf{A}[\mathbf{z}]}}$ анизотропийной нормы как функций параметра λ для плотности распределения вероятностей (3).

Таким образом, оба приведенных примера (применительно к случайным векторам) иллюстрируют целесообразность рассмотрения и учета значений именно нормированной анизотропийной нормы и, соответственно, важность построения обоснованного алгоритма нормирования значений анизотропийной нормы.

Оба представленных примера являются показательными в том смысле, что рассмотренные плотности случайных векторов характеризуются сравнительно малым (относительно всей положительной полуоси) значением меры дивергенции Кульбака-Лайблера между данными плотностями и соответствующими гауссовскими, то есть с теми же маргинальными распределениями и теми же или сравнительно близкими ковариационными матрицами.

При этом нормирование меры дивергенции в соответствии с представленным алгоритмом приводит к выводу о достаточно существенном отличии рассмотренных плотностей от соответствующих гауссовских. Отсюда вытекает более общий вывод о целесообразности рассмотрения именно нормированных мер дивергенции вероятностных распределений вообще, а не только в части рассмотрения анизотропийной нормы. В свою очередь, представленный алгоритм предоставляет такой инструментарий, поскольку применим для абсолютно любой меры дивергенции вероятностных распределений.

Список литературы

1. Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. Anisotropy of Signals and the Entropy of Linear Stationary Systems // Doklady Math. 1995. Vol. 51. P. 388-390.
2. Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. Asymptotics of the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems // Automation and Remote Control. 1999. Vol. 60, No. 3. P. 359-366.
3. Diamond P., Vladimirov I., Kurdjukov A., Semyonov A. Anisotropy-based performance analysis of linear discrete time invariant control systems // International Journal of Control. 2001. Vol. 74, No. 1. P. 28-42.
4. Kurdyukov A.P., Maksimov E.A. Robust Stability of Linear Discrete Stationary Systems with Uncertainty Bounded in the Anisotropic Norm // Automation and Remote Control. 2004. Vol. 65, No. 12. P. 1977-1990.
5. Vladimirov I.G., Diamond P., Kloeden P. Anisotropy-based robust performance analysis of finite horizon linear discrete time varying systems // Automation and Remote Control. 2006. Vol. 67, No. 8. P. 1265-1282.
6. Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P. Normalized problem of anisotropy-based stochastic H_∞ optimization for closed-loop system order reduction by balanced truncation // Automation and Remote Control. 2010. Vol. 71, No. 5. P. 776-789.
7. Timin V.N., Kurdyukov A.P. Suboptimal anisotropic filtering in a finite horizon // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77, No. 1. P. 1-20.
8. Tchaikovsky M.M., Timin V.N., Kustov A.Yu., Kurdyukov A.P. Numerical Procedures for Anisotropic Analysis of Time-Invariant Systems and Synthesis of Suboptimal Anisotropic Controllers and Filters // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79, No. 1. P. 128-144.
9. Tchaikovsky M.M., Kurdyukov A.P. Anisotropic Suboptimal Control for Systems with Linear-Fractional Uncertainty // Automation and Remote Control. 2018. Vol. 79, No. 6. P. 1100-1116.
10. Belov A.A., Andrianova O.G., Kurdyukov A.P. Control of Discrete-Time Descriptor Systems. An Anisotropy-Based Approach. Springer, 2018. 184 p.
11. Andrianova O.G., Belov A.A. Robust performance analysis of linear discrete-time systems in presence of colored noise // European Journal of Control. 2018. Vol. 42. P. 38-48.
12. Rényi A. On measures of dependence // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1959. Vol. 10, No. 3-4. P. 441-451.
13. Sarmanov O.V., Bratoeva Z.N. Probabilistic properties of bilinear expansions of Hermite polynomials // Theor. Probability Appl. 1967. Vol. 12. P. 470-481.
14. Sarmanov O.V. Remarks on uncorrelated Gaussian dependent random variables // Theory Probab. Appl., 1967. Vol. 12, No. 1. P. 124-126.