УДК 517.997.5:62-501.52

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСА УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ НЕЗАВИСИМЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Ю.Н. Горелов
Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева
Россия, 443086, Самара, Московское шоссе, 34А
E-mail: yungor07@mail.ru

С.Б. Данилов
Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева
Россия, 443086, Самара, Московское шоссе, 34А
E-mail: danilovsb_2012@mail.ru

Л.В. Курганская
Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева
Россия, 443086, Самара, Московское шоссе, 34А
E-mail: limbo83@mail.ru

Ключевые слова: ресурс управления, оптимальное распределение ресурса управления, система двойных интеграторов, оптимальное управление.

Аннотация: Рассматривается задача распределения ограниченного скоростью расхода ресурса управления (энергетического – мгновенной мощности и материального в виде скорости расхода «топлива») между независимыми объектами управления. Приведены решения этой задачи для системы объектов управления в виде двойных интеграторов и выявлен характер оптимального распределения ресурса в зависимости от его вида.

1. Введение

В [1, С. 193-194] была рассмотрена задача оптимального управления, в которой требовалось разделение ресурсов управления при решении независимых по постановке вариационных задач для одного и того же объекта управления (в задаче о прилунении космического аппарата). К этому же классу задач управления можно отнести и задачи оптимального управления системой независимых объектов управления, управляющие воздействия для которых создаются с использованием единого источника какого-либо физического ресурса управления [2]. Решение таких задач в общей постановке встречает существенные затруднения и не позволяет, как правило, выявить характер распределения физических ресурсов различного вида управления между независимыми объектами в процессе одновременного решения соответствующих парциальных задач управления. Поэтому здесь рассматриваются простейшие модельные задачи оптимального распределения ограниченных скоростью расходования энергетического и материального ресурсов управления в системе независимых объектов управления в виде пары двойных интеграторов [2-4].

2. Задачи оптимального распределения единого ресурса управления в системе независимых объектов управления

2.1. Постановка задачи оптимального распределения ресурса управления в системе двойных интеграторов

Рассмотрим задачу управления на заданном интервале $[0, T]$ для системы, в состав которой входят двойные интеграторы:

(1) $$\frac{dx_1}{dt} = x_2\,;\ \frac{dx_2}{dt} = u_1\,;\ \frac{dy_1}{dt} = y_2\,;\ \frac{dy_2}{dt} = u_2\,.$$

Пусть парциальные цели управления для объектов в (1) задаются в виде граничных условий для соответствующих переменных состояния:

(2) $$x_1(0) = x_{10}\,;\ x_2(0) = x_{20}\,;\ x_1(T) = x_{1f}\,;\ x_2(T) = x_{2f}\,;$$
$$y_1(0) = y_{10}\,;\ y_2(0) = y_{20}\,;\ y_1(T) = y_{1f}\,;\ y_2(T) = y_{2f}\,,$$

где x_{10}, x_{20}, x_{1f}, x_{2f}, y_{10}, y_{20}, y_{1f}, y_{2f} – некоторые заданные параметры, для которых двухточечные граничные задачи на интервале $[0, T]$ имеют решение.

На управляющие параметры в (1) могут накладываться следующие ограничения:

(3) $$u_1^2(t) \le m_1^2\,;\ u_2^2(t) \le m_2^2\,,\ \forall t \in [0, T],$$

где m_1 и m_2 – максимально возможные уровни управляющих воздействий. Ограничения (3) задают множества допустимых управляющих воздействий:

$$\boldsymbol{U}_1 = \{u_1 \in \mathbf{R} : |u_1| \le m_1\}\,;\ \boldsymbol{U}_2 = \{u_2 \in \mathbf{R} : |u_2| \le m_2\}\,,$$

а в плоскости $\mathrm{O}u_1u_2$ – множество $\boldsymbol{U}_{12} = \boldsymbol{U}_1 \bigcap \boldsymbol{U}_2$. Отметим, что управляющие параметры u_1, u_2 в (1), (3) отвечают управляющим воздействиям на объекты управления и на их создание требуется расходование некоторого единого ресурса управления. Если при создании управляющих воздействий $u_1(t)$, $u_2(t)$ затрачивается ресурс управления в виде мгновенных расходов «энергии управления», пропорциональной сумме текущих потребляемых мощностей, то для управляющих параметров следует также ввести еще одно ограничение, а именно:

(4) $$\eta_1 u_1^2(t) + \eta_2 u_2^2(t) \le 2E_0\,,\ \forall t \in [0, T],$$

где E_0 – мощность источника ресурса управления, а $\eta_1 \ge 1$, $\eta_2 \ge 1$ – коэффициенты учета непроизводительных затрат ресурса при формировании управляющих воздействий (из-за потерь в исполнительных органах). Ограничение (4) задает множество

$$\boldsymbol{U}_E = \{(u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2 :\ \eta_1 u_1^2 + \eta_2 u_2^2 \le 2E_0\}\,.$$

Если же при создании управляющих воздействий $u_1(t)$, $u_2(t)$ затрачивается какой-либо материальный ресурс управления в виде мгновенных расходов некоторого «топлива», то для управляющих параметров в (1) следует ввести совместное ограничение в виде:

(5) $$\eta_1 |u_1(t)| + \eta_2 |u_2(t)| \le M_0\,,\ \forall t \in [0, T],$$

где M_0 – максимальная скорость расхода ресурса, а $\eta_1 \ge 1$, $\eta_2 \ge 1$. В плоскости $\mathrm{O}u_1u_2$ ограничению (5) отвечает следующее множество:

$$\boldsymbol{U}_M = \{(u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2 :\ \eta_1 |u_1| + \eta_2 |u_2| \le M_0\}\,.$$

Следует отметить, что ограничения (3) на управляющие параметры в (1) определяют множество допустимых управляющих воздействий $\boldsymbol{U}_{12} = \boldsymbol{U}_1 \bigcap \boldsymbol{U}_2$, значениям которых в (4) или (5) будут соответствовать скорости расходования того или иного ресурса управления. Поэтому в (3), с одной стороны, и, с другой стороны, в (4) или (5) управляющие параметры имеют различный физический смысл.

Учитывая ограниченность физических ресурсов управления и необходимость их оптимального распределения между независимыми объектами управления в (1), далее рассматриваются следующие задачи оптимального управления на минимум суммарных расходов ресурсов управления. Во-первых, в случае ограничения (4) дополнительно следует минимизировать расход энергетического ресурса в виде значения функционала

$$J_0 = \frac{1}{2}\int_0^T (\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2) dt, \tag{6}$$

где $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ – весовые коэффициенты ($\alpha_1 + \alpha_2 > 0$), с помощью которых также можно учитывать приоритеты в расходовании ресурса при решении парциальных задач управления. Во-вторых, если имеется ограничение (5), тогда минимизируется функционал

$$J_0 = \int_0^T (\alpha_1 |u_1| + \alpha_2 |u_2|) dt. \tag{7}$$

Решение этих задач оптимального управления будет рассматриваться в предположении, что $\boldsymbol{U}_E \subseteq \boldsymbol{U}_{12}$ или $\boldsymbol{U}_M \subseteq \boldsymbol{U}_{12}$, то есть ограничение (3) далее исключается из рассмотрения с целью выявления влияния совместных ограничений (4) или (5) на характер оптимального распределения ресурса управления без учета влияния ограничения (3). В том случае, когда $(\boldsymbol{U}_{12} \bigcup \boldsymbol{U}_E)/(\boldsymbol{U}_{12} \bigcap \boldsymbol{U}_E) \neq \varnothing$, $(\boldsymbol{U}_{12} \bigcup \boldsymbol{U}_M)/(\boldsymbol{U}_{12} \bigcap \boldsymbol{U}_M) \neq \varnothing$, решение указанных задач было рассмотрено в [2-4].

2.2. Задача оптимального распределения энергетического ресурса

Рассматривая задачу оптимального управления (1), (2), (4), (6), в соответствии с принципом максимума Л.С. Понтрягина [5] запишем гамильтониан этой задачи

$$H = -\frac{1}{2}(\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_2^2) + \psi_1 x_2 + \psi_2 u_1 + \psi_3 y_2 + \psi_4 u_2, \tag{8}$$

где ψ_k, $k = 1,2,3,4$, – сопряженные переменные, и, соответственно, здесь

$$\psi_2(t) = \psi_{20} - \psi_{10} t; \; \psi_4(t) = \psi_{40} - \psi_{30} t, \tag{9}$$

где ψ_{k0}, $k = 1,2,3,4$, – начальные условия для сопряженных переменных. Из условия максимума H (8) по u_1 и u_2 получим программу оптимального управления:

$$\bar{u}_1(t) = \psi_2(t)/\alpha_1; \; \bar{u}_2(t) = \psi_4(t)/\alpha_2. \tag{10}$$

Ограничения (4) нарушаются при $\eta_1 \bar{u}_1^2 + \eta_2 \bar{u}_2^2 > 2E_0$ и в силу линейности функций (9) в этом случае оптимальные значения (10) должны находиться с учетом ограничения $\eta_1 u_1^2 + \eta_2 u_2^2 = 2E_0$ с помощью метода множителей Лагранжа. Следовательно, если ввести в рассмотрение вспомогательную функцию

$$F(u_1, u_2, \lambda) = H(u_1, u_2) + \frac{1}{2}\lambda(\eta_1 u_1^2 + \eta_2 u_2^2 - 2E_0),$$

где λ – множитель Лагранжа, то из условия максимума F по u_1 и u_2 получим

$$\bar{u}_1(\lambda) = \frac{\psi_2}{\alpha_1 - \lambda\eta_1}; \; \bar{u}_2(\lambda) = \frac{\psi_4}{\alpha_2 - \lambda\eta_2}. \tag{11}$$

Можно показать, что в случае выполнения равенства $\eta_1 u_1^2 + \eta_2 u_2^2 = 2E_0$ должно быть $\lambda < 0$. С учетом (11) из этого равенства получим уравнение относительно λ:

(12) $$\frac{\eta_1 \psi_2^2}{(\alpha_1 - \lambda\eta_1)^2} + \frac{\eta_2 \psi_4^2}{(\alpha_2 - \lambda\eta_2)^2} = 2E_0 .$$

Например, при $\eta_1 = \eta_2 = \eta \geq 1$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ из (12) следует: $\psi_2^2 + \psi_4^2 = 2E_0(1-\lambda)^2$, а отсюда получим: $\overline{\lambda} = \left\{1 - [\eta(\psi_2^2 + \psi_4^2)/2E_0]^{1/2}\right\}/\eta < 0$. В общем случае из решения уравнения (12) для $\lambda = \overline{\lambda}$ вычисляются значения управляющих параметров (11), когда (4) для значений ψ_2 и ψ_4 нарушаются. При этом энергетический ресурс используется полностью и распределяется между подсистемами (1) в соответствующей пропорции. Такое же распределение имеет место, когда для текущих значений ψ_2 и ψ_4 не нарушается (4), а значения управляющих параметров вычисляются по формулам (10).

2.3. Задача оптимального распределения материального ресурса

Приступая к решению задачи оптимального управления (1), (2), (5), (7), запишем ее гамильтониан [5]:

(13) $$H = -\alpha_1 |u_1| - \alpha_2 |u_2| + \psi_1 x_2 + \psi_2 u_1 + \psi_3 y_2 + \psi_4 u_2 ,$$

где сопряженные переменные ψ_k, $k = 1,2,3,4$, а также соответствующие им решения (9). Очевидно, что максимум (13) по u_1 и u_2 отыскивается здесь с учетом (5).

Итак, пусть $0 < \xi \leq 1$ – доля использования располагаемого ресурса; при $\xi = 0$ тогда $u_1 \equiv 0$, $u_2 \equiv 0$. Исходя из (5), введем следующие соотношения:

(14) $$\rho = \eta_1 |u_1| / (\xi M_0) ;\ 1 - \rho = \eta_2 |u_2| / (\xi M_0) ,$$

где $0 \leq \rho \leq 1$ – доля используемого ресурса для создания управляющего воздействия u_1, а его оставшаяся доля предназначается для создания u_2. С учетом (14) из (13) получим

(15) $$H = \xi M_0 \left[\rho(|\psi_2| - \alpha_1)/\eta_1 + (1-\rho)(|\psi_4| - \alpha_2)/\eta_2\right] + \psi_1 x_2 + \psi_3 y_2 .$$

Введем далее функцию

(16) $$K(\rho;\ \psi_2, \psi_4) = \rho(|\psi_2| - \alpha_1)/\eta_1 + (1-\rho)(|\psi_4| - \alpha_2)/\eta_2$$

и перепишем (15) в следующем виде:

(17) $$H = \xi M_0 K(\rho;\ \psi_2, \psi_4) + \psi_1 x_2 + \psi_3 y_2 .$$

Из условия максимума гамильтониана (13) по u_1 и u_2, а также с учетом (14) из (17) следует, что при любом значении $K < 0$ должно быть $\xi = 0$, то есть располагаемый ресурс управления в этом случае не используется и, стало быть, $\overline{u}_1 = 0$ и $\overline{u}_2 = 0$, что есть следствие выполнения условий: $|\psi_2| < \alpha_1$; $|\psi_4| < \alpha_2$, или $(\psi_2, \psi_4) \in \boldsymbol{\Psi}_{24} = \boldsymbol{\Psi}_2 \bigcap \boldsymbol{\Psi}_4$, где $\boldsymbol{\Psi}_2 = \{(\psi_2, \psi_4) : |\psi_2| \leq \alpha_1; \psi_4 \in \mathbf{R}\}$, $\boldsymbol{\Psi}_4 = \{(\psi_2, \psi_4) : \psi_2 \in \mathbf{R};\ |\psi_4| \leq \alpha_2\}$, а $\partial\boldsymbol{\Psi}_2$ и $\partial\boldsymbol{\Psi}_4$ – границы полос. Если $\psi_2 \in \partial\boldsymbol{\Psi}_2$, а $\psi_4 \in \boldsymbol{\Psi}_4 \setminus \partial\boldsymbol{\Psi}_4$, то $\max K = 0$ при $\rho = 1$, а максимум (17) достигается при любом $0 \leq \xi \leq 1$, то есть с учетом (14) при $|\overline{u}_1| = \xi M_0 / \eta_1$ и $\overline{u}_2 = 0$. Напротив, если $\psi_2 \in \boldsymbol{\Psi}_2 \setminus \partial\boldsymbol{\Psi}_2$ и $\psi_4 \in \partial\boldsymbol{\Psi}_4$, то $\max K = 0$ при $\rho = 0$ и максимум (17) достигается также при любом $0 \leq \xi \leq 1$, то есть здесь $\overline{u}_1 = 0$ и $|\overline{u}_2| = \xi M_0 / \eta_2$. Остается рассмотреть условия максимума функции (17) для следующих пар (ψ_2, ψ_4): 1) $(\psi_2, \psi_4) \in \boldsymbol{\Psi}_4 \setminus \boldsymbol{\Psi}_{24}$; 2) $(\psi_2, \psi_4) \in \boldsymbol{\Psi}_2 \setminus \boldsymbol{\Psi}_{24}$; 3) $(\psi_2, \psi_4) \in \mathbf{R}^2 \setminus (\boldsymbol{\Psi}_2 \bigcup \boldsymbol{\Psi}_4) = \hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$ [3, 4].

В первом случае для (16) получим: $\max K = (|\psi_2| - \alpha_1)/\eta_1$ при $\rho = 1$, и, стало быть, максимум (17) достигается при $\xi = 1$. Поэтому с учетом (10) $|\bar{u}_1| = M_0/\eta_1$ и $\bar{u}_2 = 0$. Во втором случае получим $\rho = 0$, $\xi = 1$, то есть здесь $\bar{u}_1 = 0$ и $|\bar{u}_2| = M_0/\eta_2$. То есть в этих случаях располагаемый ресурс управления используется полностью только одним из объектов управления в системе (1). В третьем случае $(\psi_2, \psi_4) \in \hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$ выполняются условия: $|\psi_2|>\alpha_1$; $|\psi_4|>\alpha_2$, то есть $K > 0$ для любых $0 \le \rho \le 1$, а максимум (16) по ρ определяется в зависимости от значения $\chi = \eta_2(|\psi_2| - \alpha_1) - \eta_1(|\psi_4| - \alpha_2)$. Если $\chi = 0$, то возможно существование особого оптимального управления [3]. Отметим, что для $\chi = 0$ в плоскости $O\psi_2\psi_4$ задается соответствующее разбиение области $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$; в этих подобластях имеет место «конкуренция» за использование ресурса управления между подсистемами в (1) [3].

Детальное исследование случая, характерного полным использованием материального ресурса управления, приведено в [3,4].

Исключая параметр t из (9), в плоскости $O\psi_2\psi_4$: $\psi_{30}(\psi_2 - \psi_{20}) - \psi_{10}(\psi_4 - \psi_{40}) = 0$, получим уравнение прямой, отрезок которой – AB (координаты точки A – (ψ_{20}, ψ_{40}), см. с.172 в [3]) отвечает интервалу управления $[0, T]$. Отрезок AB пересекает «линии переключения» в точках, в которых происходит смена режима расходования ресурса управления, что характеризуется попеременным его использованием объектами (1) при решении ими парциальных задач управления (1), (2) , а именно: в области $\hat{\boldsymbol{\Psi}}_{24}$ располагаемый ресурс используется полностью [3,4].

В самом общем случае, когда $(\boldsymbol{U}_{12} \cup \boldsymbol{U}_M)/(\boldsymbol{U}_{12} \cap \boldsymbol{U}_M) \ne \varnothing$, решение задачи (1) – (3), (5), (7) приведено в [3], где отмечено, что в рассматриваемой задаче возможно возникновение режимов с особыми оптимальными управлениями.

3. Заключение

Полученные решения задач оптимального управления для системы двойных интеграторов (1) показывают, что характер распределения единого ресурса управления между ними существенно зависит от вида физического ресурса управления. В случае энергетического ресурса его оптимальное распределение между объектами управления (1) является непрерывным и согласованным при решении парциальных задач управления (1), (2) на всем интервале управления $[0, T]$. В случае материального ресурса его оптимальное распределение в системе (1) характеризуется попеременным доминированием объектов управления в использовании такого ресурса управления. В случае системы независимых объектов управления более общего вида, чем двойные интеграторы, можно предположить, что характер распределения ресурса управления между ними также будет различаться в зависимости от вида ресурса.

Список литературы

1. Летов А.М. Математическая теория процессов управления. М.: Наука, 1981. 256 с.
2. Горелов Ю.Н. К задаче оптимального распределения ресурса в системе независимых объектов управления. I // Известия СамНЦ РАН. 2017. Т. 19, № 6. С. 156-167.
3. Горелов Ю.Н. К задаче оптимального распределения ресурса в системе независимых объектов управления. II // Известия СамНЦ РАН. 2017. Т. 19, № 6. С. 168-178.

4. Горелов Ю.Н. К задаче оптимального распределения физического ресурса управления для сепаратных динамических систем // Сб. тр.: IV Международной конференции «Информационные технологии и нанотехнологии» ИТНТ-2018. Самара, 24-27 апреля 2018 г. Самара: Новая техника, 2018. С. 1885-1895.
5. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М.: Наука, 1976. 392 с.