УДК 681.511.46

АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ СЕТЕВЫМИ СИСТЕМАМИ НА БАЗЕ СУБПРЕДИКТОРОВ РЕГУЛИРУЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ И ВОЗМУЩЕНИЯ

И.Б. Фуртат, П.А. Гущин
Институт проблем машиноведения РАН
Университет ИТМО
Российский государственный университет нефти и газа (НИУ) им. И.М. Губкина
Россия, 199178, Санкт-Петербург, Большой пр. В.О., 61
Россия, 197101, Санкт-Петербург, Кронверкский проспект, 49
Россия, 119991, Москва, Ленинский пр., 65
E-mail: cainenash@mail.ru

Ключевые слова: сетевые системы, запаздывание в канале управления, компенсация возмущений, предиктор, субпредиктор.

Аннотация: Предложен алгоритм управления сетевыми системами, агенты которых описываются линейными дифференциальными уравнениями с запаздывающим входным сигналом при наличии внешних возмущений. Сначала для синтеза алгоритма используются субпредикторы регулируемой величины и возмущения в виде последовательного соединения соответсвующих предикторов, осуществляющих многошаговое прогнозирование. Получены достаточные условия устойчивости замкнутой системы в виде разрешимости линейных матричных неравенств.

1. Введение

Впервые решение задачи управления в условии запаздывания предложено О. Смитом в [1] для устойчивых объектов без возмущения. Для неустойчивых объектов А. Манитиус и А. Олброт в [2] предложили статический закон управления с использованием пропорционально-интегрального предиктора, построенного на базе решения уравнения объекта. В настоящее время на базе схем [1, 2] предложено большое количесвто решений и показаны их ограничения для систем с запаздыванием [3–6]. В [8] предложен новый предиктор, позволяющий проектировать алгоритмы управления неустойчивыми объектами. По сравнению с [2], предиктор [8] не требует численной реализации и, как следствие, гораздо проще в технической реализации и расчете параметров. В [9] на базе предиктора [8] предложен субпредиктор, осуществляющий многошаговое прогнозирование регулируемой переменной. Численные примеры показали, что применение субпредикторного алгоритма позволяет управлять объектами с бо́льшим временем запаздывания, чем при использовании алгоритма на базе предиктора [8]. Однако результаты [8, 9] слишком чувствительны к возмущениям.

При этом до сих не рассматривалось управление сетевыми объеками с запаздыванием в канале управления при наличие внешних возмущений. Решению данной задачи посвящена настоящая статья.

2. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую сеть S, состоящую из N агентов. Введем орграф $\Gamma = (V, E)$, ассоциированный с сетью S, где каждой вершине орграфа Γ соответствуют подсистемы S_i, $i = 1, .., N$ и подсистема лидера S_L, $V = \{v_1, \ldots, v_k, v_L\}$ – множество вершин, $E \in V \times V$ – множество ребер. Пусть $C = (c_{ij}), S = (s_{iL})$ – взвешенные матрицы смежности орграфа Γ такие, что $c_{ij} = 1$ и $s_{iL} = 1$ если $j \in N_{jL}$, иначе $c_{ij} = 0$ и $s_{iL} = 0$, $N_{jL} = \{v_j \in V : (v_j, v_i), (v_i, v_L) \in E\}$ – множество смежных вершин для узла v_i. Запись $(v_j, v_i), (v_i, v_L) \in E$ означает, что информация поступает от подсистемы S_i к подсистеме S_j и от подсистемы лидера S_L к S_i. Предположим, что оргаф Γ имеет ориентированное оставное дерево.

Рассмотрим подсистему S_i, соответствующую i-й вершине орграфа Γ сети S, динамические процессы в которой описываются следующим уравнением

$$\dot{\chi}_i(t) = A\chi_i(t) + Bu_i(t-h) + B\phi_i(t), \quad t \geqslant 0, \quad u_i(s) = 0, \quad s < 0, \quad i = 1, ..., N, \tag{1}$$

где $\chi_i(t) \in \mathrm{R}^n$ – измеряемый вектор состояния, $u_i(t) \in \mathrm{R}^m$ – сигнал управления, $\phi_i(t) \in \mathrm{R}^m$ – внешнее возмущение с ограниченными $r+3$ производными, $r \geqslant 0$ – параметр, который будет использоваться при синтезе алгоритма управления, $h > 0$ – известное время запаздывания, A и B – известные матрицы соответствующих размеров, пара (A, B) управляема и выполнено условие $B^+B = I_m$, B^+ – псевдообратная матрица для матрицы B и I_m – единичная матрица порядка m.

Зададим подисистему лидера S_L в виде

$$\dot{\chi}_m(t) = A\chi_m(t) + Br_m(t-h), \quad r_m(s) = 0, \quad s < 0, \quad i = 1, ..., N. \tag{2}$$

Требуется разработать алгоритм управления, который обеспечит устойчивость (1) по вход-состоянию (input-to-state stability) и выполнение условия синхронизации

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} |\chi_i - \chi_m| \leqslant \delta, \quad i = 1, ..., N, \tag{3}$$

где $\delta > 0$ – точность регулирования, оценка которой будет приведена ниже.

3. Синтез субпредиктора регулируемой величины и субпредиктора возмущения

Введем ошибку синхронизации $x_i = \sum_{j \in N_{jL}} (\chi_i - \chi_m) + (\chi_i - \chi_j)$. С учетом (1) и (2) продифференцируем x_i и результат запишем как

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + n_{jL}Bu_i(t-h) + B\sum_{j \in N_{jL}} (u_j(t-h)) + Bf_i(t), \quad i = 1, ..., N, \tag{4}$$

где $f_i(t) = \sum_{j\in N_{jL}}[\phi_i(t) - \phi_j(t)] - r_m(t-h)$, n_{jL} – количество смежных вершин для i.

Зададим закон управления u_i в виде следуещей суммы

(5) $$u_i = u_{0i} + u_{1i} + u_{2i}, \quad i = 1, ..., N.$$

С помощью сигнала u_{0i} будем компенсировать перекрестные связи по сигналам управления, сигнал u_{1i} необходим для обеспечения устойчивости замкнутой системы, а с помощью сигнала u_{2i} осуществим компенсацию возмущения ψ_i. Итак, зазадим первую составляющую закона управления в виде

(6) $$u_{0i}(t) = \tfrac{1}{n_{jL}}\sum_{j\in N_{jL}} u_j(t), \quad i = 1, ..., N.$$

Для прогноза регулируемой величины введем систему уравнений:

(7) $$\begin{array}{l} \dot{\bar{x}}_{ji}(t) = A\bar{x}_{ji}(t) + D_j\left(\bar{x}_{j,i+1}(t) - \bar{x}_{ji}(t-\bar{h})\right) + Bu_{1i}(t-(j-1)\bar{h}), \\ j = 1, ..., M-1, \\ \dot{\bar{x}}_{Mi}(t) = A\bar{x}_{Mi}(t) + D_M\left(x_i(t) - \bar{x}_{Mi}(t-\bar{h})\right) + Bu_{1i}(t-(M-1)\bar{h}), \\ i = 1, ..., N, \end{array}$$

где $\bar{x}_{ji}(t) \in \mathrm{R}^n$, $\bar{h} = \frac{h}{M}$. Число M задается разработчиком, а матрицы D_j выбираются из условия обеспечения предельной ограниченности решений следующей системы уравнений:

(8) $$\begin{array}{l} \dot{\kappa}_j(t) = A\kappa_j(t) - D_j\kappa_j(t-\bar{h}) + D_{i+1}\kappa_{j+1}(t-\bar{h}), \; j = 1, ..., M-1, \\ \dot{\kappa}_M(t) = A\kappa_M(t) - D_M\kappa_M(t-\bar{h}). \end{array}$$

где $\kappa_j \in \mathrm{R}^n$, $i = 1, ..., M$. Систему (7) будем называть субпредиктором регулируемой величины, поскольку каждое уравнение системы (7) обеспечивает прогноз регулируемой величины на время запаздывания $\frac{h}{M}$.

Введем ошибки прогноза:

(9) $$\begin{array}{l} e_{ji}(t) = \bar{x}_{j+1,i}(t-(M-j)\bar{h}) - \bar{x}_{ji}(t-(M-j+1)\bar{h}), \; j = 1, ..., M-1, \\ e_{Mi}(t) = x_i(t) - \bar{x}_{Mi}(t-\bar{h}), \quad i = 1, ..., N. \end{array}$$

При $e_{ji}(t) \to 0$, $i = 1, ..., M$, следует, что $\bar{x}_{1i}(t-h) \to x_i(t)$ или $\bar{x}_{1i}(t) \to x_i(t+h)$. С учетом (5) продифференцируем (9) вдоль решений уравнений (1) и (7):

(10) $$\begin{array}{l} \dot{e}_{ji}(t) = Ae_{ji}(t) - D_je_{ji}(t-\bar{h}) + D_{j+1}e_{j,i+1}(t-\bar{h}), \; j = 1, ..., M-1, \\ \dot{e}_{Mi}(t) = Ae_{Mi}(t) - D_Me_{Mi}(t-\bar{h}) + Bu_{2i}(t-h) + Bf_i(t), \quad i = 1, ..., N. \end{array}$$

Если положить $u_{2i}(t) \equiv 0$ и $f_i(t) \equiv 0$ и выбрать D_j, $j = 1, ..., M$, такими, что система (8) асимптотически устойчива, то из (9) следует, что $\lim_{t\to\infty} x_i(t+h) = \lim_{t\to\infty} \bar{x}_{1i}(t)$. Следовательно, зададим закон управления u_{1i} в виде

(11) $$u_{1i}(t) = -K\bar{x}_{1i}(t), \quad i = 1, ..., N,$$

где матрица K задается из условия гурвицевости матрицы $A - BK$.

Однако $f_i \neq 0$ по условию задачи. Поэтому далее синтезируем алгоритм компенсации возмущений u_{2i} с целью уменьшения влияния возмущения f на значение ошибок прогноза e_{ji}, $j = 1, ..., M$. Введем вспомогательный контур

$$\dot{e}_{ai}(t) = Ae_{ai}(t) - D_M e_{ai}(t - \bar{h}) + Bu_{2i}(t - h), \quad i = 1, ..., N, \tag{12}$$

где $e_{ai}(t) \in \mathrm{R}^n$. Найдем производную по времени от функции $\xi_i(t) = e_{Mi}(t) - e_{ai}(t)$ вдоль траекторий M-го уравнения в системе (10) и уравнения (12):

$$\dot{\xi}_i(t) = A\xi_i(t) - D_M \xi_i(t - \bar{h}) + Bf_i(t), \quad i = 1, ..., N. \tag{13}$$

Следуя структуре (13), зададим оценку возмущения в виде

$$\hat{f}_i(t) = B^+ \left(\hat{\dot{\xi}}_i(t) - A\xi_i(t) + D_M \xi_i(t - \bar{h}) \right), \quad i = 1, ..., N, \tag{14}$$

где сигнал $\hat{\dot{\xi}}_i(t)$ получен с помощью алгоритма

$$\hat{\dot{\xi}}_{ji}(t) = \frac{p}{\mu p + 1} \xi_{ji}(t), \quad j = 1, ..., n, \quad i = 1, ..., N. \tag{15}$$

Здесь $\mu > 0$ – достаточно малое число, $p = d/dt$ – оператор дифференцирования.

Теперь сформируем алгоритм прогноза оценки возмущения $\hat{f}(t)$ в виде:

$$\begin{array}{l} \tilde{f}_i(t + \hat{h}) = \sum\limits_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \hat{f}_i(t - \hat{h}(j-1)), \\ \tilde{f}_i(t + l\hat{h}) = \sum\limits_{j=1}^{l-1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \tilde{f}_i(t - \hat{h}(j-l)) + \sum\limits_{j=l}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \times \\ \qquad \times \hat{f}_i(t - \hat{h}(j-l)), \ l = 2, ..., r+1 \\ (\text{или } l = 2, ..., N, \text{ если } N < r+2), \\ \tilde{f}_i(t + k\hat{h}) = \sum\limits_{j=1}^{r+1} (-1)^{j-1} C_{r+1}^j \tilde{f}_i(t - \hat{h}(j-k)), \ k = r+2, ..., N \\ (\text{если } N \geqslant r+2), \quad i = 1, ..., N. \end{array} \tag{16}$$

Систему (16) будем называть субпредиктором возмущений. Отметим, что при $N < r+2$ субпредиктор возмущения состоит только из первых двух выражений (16). При $N \geqslant r+2$ субпредиктор возмущения включает в себя все уравнения (16). Также из (16) видно, что время прогноза возмущения составляет $\hat{h}r = \frac{hr}{N}$.

Сформируем закон частичной компенсации возмущения в виде

$$u_{2i}(t) = -\tilde{f}_i(t + h), \quad i = 1, ..., N. \tag{17}$$

Введем матрицы:

$$A_p = \begin{bmatrix} A - BK & 0 & ... & 0 \\ 0 & A & ... & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & A \end{bmatrix}, D_p = \begin{bmatrix} 0 & D_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -D_1 & D_2 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -D_2 & .... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & ... & -D_M \end{bmatrix}, \quad B_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B \end{bmatrix}.$$

Утверждение 1. *Рассмотрим систему управления, состоящую из объекта (1), субпредиктора регулируемой величины (7), вспомогательного контура (12), субпредиктора возмущения (16) и закона управления (5), (6), (11), (17). Пусть для заданного числа $\alpha > 0$ и матриц K, D существуют коэффициент $\beta > 0$ и матрицы $P > 0$, $P_2 > 0$, $P_3 > 0$, $Q > 0$, $S > 0$ такие, что выполнено ЛМН*

$$\Psi := \begin{bmatrix} \Psi_{11} & P - P_2^{\mathrm{T}} + A_0^{\mathrm{T}} P_3 & 0 & -\bar{h} P_2^{\mathrm{T}} D_p & P_2^{\mathrm{T}} B_p \\ * & -P_3 - P_3^{\mathrm{T}} + \bar{h} S & 0 & -\bar{h} P_3^{\mathrm{T}} D_p & P_3^{\mathrm{T}} B_p \\ * & * & -e^{-2\alpha \bar{h}} Q & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{h} S & 0 \\ * & * & * & * & -\beta I \end{bmatrix} < 0. \tag{18}$$

где $\Psi_{11} = P_2^{\mathrm{T}} (A_p + D_p) + (A_p + D_p)^{\mathrm{T}} P_2 + 2\alpha P + Q$. Тогда решения замкнутой системы (1), (5)–(7), (11), (12), (16), (17) предельно ограничены и выполнено целевое условие (3), где $\delta = \mathrm{O}\left(\overline{\lim}_{t\to\infty} |\varepsilon_N(h,t)|\right)$ при достаточно малом μ. Дополнительно: все сигналы ограничены в замкнутой системе.

4. Заключение

Синтезированы алгоритмы управления сетевыми системами с запаздывающим входным сигналом при наличии внешних возмущений. Алгоритм базируется на использовании субпредикторов регулируемой величины и возмущения. Использование принципа компенсации возмущений позволяет существенно уменьшить влияние возмущений на качество переходных процессов по сравнению с методами подавления возмущений [3, 4]. Получены достаточные условия устойчивости замкнутой системы в виде разрешимости линейных матричных неравенств.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-79-10104) в Институте проблем машиноведения РАН.

Список литературы

1. Smith J.M. Closer Control of Loops with Dead Time // Chem. Eng. Prog. 1959. No. 53. P. 2217-219.
2. Manitius A.Z., Olbrot A.W. Finite Spectrum Assignment Problem for Systems with Delays // IEEE Trans. Autom. Control. 1979. Vol. AC-24, No. 4. P. 541-553.
3. Krstić M. Delay Compensation for Nonlinear, Adaptive, and PDE Systems. Birkhauser, 2009.
4. Mazenc F., Niculesqu S.-I., Krstić M. Lyapunov–Krasovskii Functionals and Application to Input Delay Compensation for Linear Time-Invariant Systems // Automatica. 2012. Vol. 48, No. 7. P. 1317-1323.
5. Van Assche V., Dambrine M., Lafay J.F., Richard J.P. Some Problems Arising in the Implementation of Distributed-Delay Control Laws // Proc. 38th IEEE Conf. on Decision and Control. Phoenix, 1999.
6. Engelborghs K., Dambrine M., Rose D. Limitations of a Class of Stabilization Methods for Delay Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2001. Vol. AC-46, No. 2. P. 336-339.
7. Mondié S., Dambrine M., Santos O. Approximation of Control Laws with Distributed Delays: a Necessary Condition for Stability // Kybernetika. 2002. Vol. 38, No. 5. P. 541-551.
8. Dugard L., Verriet E. Stability and Control of Time-delay Systems. London: Springer, 1997.
9. Najafi M., Hosseinnia S., Sheikholeslam F., Karimadini M. Closed-Loop Control of Dead Time Systems via Sequential Sub-predictors // Int. J. Control. 2013. Vol. 86, No. 4. P. 599-609.