УДК УДК 531.36; 62-50

ПЕРЕМЕЩЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ЦЕПОЧКОЙ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ ОБ ИХ СОСТОЯНИИ

И.М. Ананьевский

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН

Россия, 119526, Москва, Вернадского просп., д. 101, корп. 1

E-mail: anan@ipmnet.ru

Ключевые слова: механическая система, синтез управления, упругие элементы, возмущения, неполная информация, дефицит управления.

Аннотация: Рассматривается система, состоящая из несущего тела и прикрепленной к нему цепочки последовательно соединенных линейных осцилляторов. Тело движется по горизонтальной прямой под действием ограниченной управляющей силы и малого неизвестного возмущения. Предполагается, что координата и скорость тела в каждый момент времени известны, а фазовые состояния всех осцилляторов, кроме первого, не доступны измерениям. Предложен закон управления с обратной связью, который останавливает за конечное время несущее тело в заданном положении и приводит все осцилляторы в состояние покоя.

1. Введение

Исследуется задача об управляемом перемещении твердого тела, к которому прикреплена цепочка из линейных осцилляторов — последовательно соединенных пружинами n масс (рис. 1). Несущее тело движется по горизонтальной прямой под действием ограниченной управляющей силы. Предполагается, что тело испытывает неконтролируемое и непостоянное воздействие внешней среды, например, сил сухого трения, что координата и скорость тела в каждый момент времени известны, а из фазовых переменных, описывающих динамику всех масс, доступна измерениям лишь координата первой массы. Требуется построить ограниченное по модулю управление, которое остановит несущее тело в заданном терминальном положении за конечное (нефиксированное) время и полностью погасит колебания осцилляторов. Искомое управление должно иметь форму обратной связи, т. е. зависеть лишь от координат и скоростей несущего тела и первой массы.

Рассматриваемая система служит моделью сложного объекта, содержащего упругие звенья, который необходимо переместить в заданное положение с помощью ограниченной силы за конечное время в условиях неполноты информации о текущем состоянии упругих звеньев.

Рис. 1. Несущее тело с цепочкой осцилляторов

Аналогичная задача о приведении в заданное положение тележки с двумя подвешенными к ней линейными осцилляторами, фазовые состояния которых не измеряются, изучена в [1].

2. Постановка задачи и уравнения движения

Динамика рассматриваемой системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned} & m_0\ddot{x}_0 = -\kappa_1 x_0 + \kappa_1 x_1 + u + v, \\ & m_i\ddot{x}_i = \kappa_i x_{i-1} - (\kappa_i + \kappa_{i+1})x_i + \kappa_{i+1}x_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \\ & m_n\ddot{x}_n = -\kappa_n x_{n-1} + \kappa_n x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь x_0 — координата несущего тела на прямой, m_0 — масса несущего тела, x_i — координата массы m_i, κ_i — жесткость пружины, $i = 1, \ldots, n$.

На управляющую силу u и возмущение v накладываются ограничения

$$|u| \leqslant U, \quad |v| \leqslant \rho U, \quad 0 < \rho < 1. \tag{2}$$

Положим $y = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_0, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)^\top$, $y \in R^{2n+2}$, и запишем уравнения (1) в векторной форме

$$\dot{y} = P_0 y + B_0(u + v), \tag{3}$$

используя блочные матрицу P_0 и вектор B_0:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_{n+1} \\ A_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \frac{1}{m_0}\begin{pmatrix} 0 \\ e_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее через I_k обозначена единичная матрица порядка k, $e_k = (1, 0, \ldots, 0)^\top$, $e_k \in R^k$, а трехдиагональная $(n+1) \times (n+1)$-матрица A_0 имеет вид:

$$A_0 = \begin{pmatrix} -\dfrac{\kappa_1}{m_0} & \dfrac{\kappa_1}{m_0} & 0 & \ldots & 0 \\ \dfrac{\kappa_1}{m_1} & -\dfrac{\kappa_1 + \kappa_2}{m_1} & \dfrac{\kappa_2}{m_1} & \ldots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ldots & \dfrac{\kappa_{n-1}}{m_{n-1}} & -\dfrac{\kappa_{n-1} + \kappa_n}{m_{n-1}} & \dfrac{\kappa_n}{m_{n-1}} \\ 0 & \ldots & 0 & \dfrac{\kappa_n}{m_n} & -\dfrac{\kappa_n}{m_n} \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что координата и скорость несущего тела в каждый момент времени известны, а из фазовых переменных, описывающих динамику осцилляторов, доступна измерениям лишь координата первой массы. Требуется построить удовлетворяющее ограничению (2) управление в форме обратной связи, то есть как функцию переменных y_1, y_2, y_{n+2}, которое остановит всю систему, т. е. несущее тело и осцилляторы, в начале координат фазового пространства R^{2n+2} за конечное время.

3. Алгоритм построения управления

Наряду с системой (3) рассмотрим систему уравнений, описывающую лишь динамику осцилляторов. Для этого введем в рассмотрение вектор $z \in R^{2n}$, $z = (x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n)^\top$. Уравнения движения масс m_i, $i = 1, \ldots, n$, имеют вид

$$\dot{z} = P_1 z + B_1 x_0(t), \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \frac{\kappa_1}{m_1} \begin{pmatrix} 0 \\ e_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Здесь A_1 – трехдиагональная $n \times n$-матрица, получающаяся из матрицы A_0 путем удаления первых строки и столбца.

По условию задачи координата первой массы доступна измерению, т. е. наблюдается величина

$$q = Qz, \quad Q = e_{2n}^\top.$$

Теорема. *Пара* (P_0, B_0) *управляема, а пара* (P_1, Q) *наблюдаема.*

При доказательстве теоремы используется критерий Калмана и свойство трехдиагональности матриц P_0 и P_1.

Наблюдаемость системы (4) позволяет считать вектор z известным, следовательно, известен и весь фазовый вектор y системы (3). Учитывая управляемость системы (3), для приведения ее в начало координат может быть применен подход, развитый в [2]. Этот подход позволяет построить закон управления в форме обратной связи, т. е. как функцию вектора текущего фазового состояния y, удовлетворяющий ограничению (2) и, при некоторых предположениях относительно ρ, останавливающий систему (3) в начале координат.

Таким образом, указанный алгоритм приводит несущее тело в заданное положение и успокаивает осцилляторы, используя лишь информацию о фазовом состоянии тележки и координате первой массы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект № 17-01-00538) и в рамках темы "Методы управления, оценивания и оптимизации в механических системах"(АААА-А17-117021310387-0).

Список литературы

1. Ananievski I.M., Ishkhanyan T.A. Bringing a cart with oscillators to a given state in the presence of perturbations // Proceedings of 2018 14th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems"(Pyatnitskiy's Conference) (STAB). Russia, Moscow, V.A. Trapeznikov Institute of controls sciences, May 30 - June 1, 2018. Edited by V.N. Tkhai.
2. Ovseevich A. A local feedback control bringing a linear system to equilibrium // JOTA. 2015. Vol. 165, No. 2. P. 532-544.