УДК 517.926

К ИССЛЕДОВАНИЮ РОБАСТНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ

О.Г. Антоновская

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университете

Россия, 603950, Нижний Новгород, Ильинская ул., 65

E-mail: olga.antonovsckaja@yandex.ru

Ключевые слова: система управления, робастная устойчивость, метод функций Ляпунова, квадратичная функция Ляпунова.

Аннотация: В работе приведены достаточные условия робастной устойчивости на основе построения общей квадратичной функции Ляпунова для параметрически неопределенных семейств динамических систем. В качестве функции Ляпунова выбирается положительно определенная квадратичная форма, которая является функцией Ляпунова для одной из систем семейства и удовлетворяет ограничению на ее первую производную в силу системы.

1. Введение

Известно [5], что практически в каждой задаче управления имеется неопределенность, связанная либо с наличием внешних возмущений, либо с невозможностью точно определить параметры модели. В связи с этим становится актуальной проблема управления в условиях неопределенности, т.е. проблема робастности.

Важное место в теории систем занимает проблема робастной устойчивости, которая связана с получением условий устойчивости не одной конкретной системы, а целой совокупности систем с заданными ограничениями на их параметры [4, 5]. В некоторых специальных случаях робастная устойчивость может быть установлена эффективно. Одним из таких случаев является случай интервальности параметров системы [5]. К такому семейству применима теорема Харитонова [6], согласно которой робастная устойчивость эквивалентна устойчивости четырех так называемых угловых систем (вернее, угловых полиномов, которые называют полиномами Харитонова) [5]. Однако в общем случае, когда параметрическая неопределенность является более сложной, непосредственная проверка робастной устойчивости семейства систем сложна, поэтому используется подходя. основанных на определении достаточных условий робастной устойчивости: в частности, подход, основанный на построении общей квадратичной функции Ляпунова для неопределенных семейств (робастная квадратичная устойчивость) [4].

2. Постановка задачи

Рассмотрим параметрически неопределенную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = \sum_{j=0}^{n} a_{ij}(q)x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где q – параметр, изменяющийся на некотором заданном множестве. И пусть при некотором значении параметра $q = q_0$ корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части. Рассмотрим положительно определенную квадратичную форму

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}x_i x_j \quad (K_{ij} = K_{ji}). \tag{2}$$

В силу системы (1) при $q = q_0$ рассмотрим первую производную квадратичной формы (2)

$$\dot{V}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}(\dot{x}_i x_j + x_i \dot{x}_j), \tag{3}$$

(здесь $\dot{x}_i$ вычисляется из (1)). Тогда, согласно [2], квадратичная форма (2) является функцией Ляпунова системы (1) при $q = q_0$, для которой максимальное значение первой производной (3) на заданной поверхности уровня $V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = V_0$ равно $\delta_0 V_0$, $(2\max_i Re\lambda_i < \delta_0 < 0)$, тогда и только тогда, когда параметры (2) удовлетворяют уравнению

$$det(A_{km} - \delta K_{km})_{k,m=1}^{n} = 0, \tag{4}$$

в котором $\delta = \delta_0$, а

$$A_{km} = \sum_{i=1}^{n}(K_{ik}a_{im}(q_0) + K_{im}a_{ik}(q_0)) \quad (k, m = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Здесь величины A_{km} – коэффициенты квадратичной формы (3) при $q = q_0$.

Будем предполагать, что построена квадратичная форма (2), которая является функцией Ляпунова для (1).

Заметим, что уравнение (4) может быть переписано в виде $P_n(\delta) = 0$, где

$$P_n(\delta) = \delta^n + a_1\delta^{n-1} + a_2\delta^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\delta + a_n, \tag{6}$$

$$a_k = (-1)^k \frac{\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k} detK^{i_1,i_2,\ldots,i_k}}{detK}, \; a_n = (-1)^n \frac{detA}{detK}, \tag{7}$$

матрицы $K = (K_{ij})$, $A = (A_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, а матрица $K^{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ получается из матрицы K заменой столбцов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ на соответствующие столбцы матрицы A. Поскольку действительные корни (6) определяют значения величины

$\dot{V}/V$ на поверхности уровня $V = V_0$, каждому из которых соответствуют координаты точек этой поверхности [3], в которых $\dot{V}/V = \delta$, то в случае, когда (2) является функцией Ляпунова, величина $a_n \neq 0$. Ведь a_n есть произведение всех корней уравнения (4), а все корни уравнения $\delta < 0$.

Пусть значение параметра изменилось. Тогда и коэффициенты системы изменятся на величины $\Delta a_{ij} = a_{ij}(q) - a_{ij}(q_0)$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ и система примет вид

$$\dot{x}_i = \sum_{j=0}^{n} (a_{ij}(q_0) + \Delta a_{ij}) x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{8}$$

И если считать функцию (2) неизменной, величины A_{km} преобразуются к виду $A_{km} + \Delta A_{km}$, где

$$\Delta A_{km} = \sum_{i=1}^{n} (K_{ik} \Delta a_{im}(q_0) + K_{im} \Delta a_{ik}(q_0)) \quad (k, m = 1, 2, \dots, n). \tag{9}$$

Уравнение (4) примет вид

$$det(A_{km} + \Delta A_{km} - \delta K_{km})_{k,m=1}^{n} = 0, \tag{10}$$

а полином (6) – вид

$$P_n^{\Delta}(\delta) = \delta^n + (a_1 + \Delta a_1)\delta^{n-1} + (a_2 + \Delta a_2)\delta^{n-2} + \dots + (a_{n-1} + \Delta a_{n-1})\delta + a_n + \Delta a_n, \tag{11}$$

где Δa_k представляют собой сумму произведений всех миноров до порядка k матрицы $\Delta A = (\Delta A_{ij})$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ на соответствующие им алгебраические дополнения из матрицы $K^{i_1, i_2, \dots, i_k}$. В частности, коэффициент Δa_n равен

$$\Delta a_n = (-1)^n \frac{S_a}{detK}, \tag{12}$$

где

$$S_a = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Delta A_{ij} A^{ij} + \sum_{i_1 < i_2} \sum_{j_1 < j_2} \begin{vmatrix} \Delta A_{i_1, j_1} & \Delta A_{i_1, j_2} \\ \Delta A_{i_2, j_1} & \Delta A_{i_2, j_2} \end{vmatrix} A_{j_1, j_2}^{i_1, i_2} + \dots + det\Delta A, \tag{13}$$

A^{ij} – алгебраическое дополнение элемента A_{ij} в матрице A, а $A_{j_1, j_2}^{i_1, i_2}$ – алгебраическое дополнение минора, построенного на строках с номерами i_1, i_2 и столбцах с номерами j_1, j_2 из матрицы A.

Задача состоит в определении условий, при которых квадратичная функция Ляпунова, построенная для системы (1), будет оставаться функцией Ляпунова и для системы (8).

3. Методы решения задачи

1. Рассмотрим интервальный полином

$$P(\delta) = \delta^n + [a_1]\delta^{n-1} + [a_2]\delta^{n-2} + \dots + [a_{n-1}]\delta + [a_n], \tag{14}$$

в котором $[a_k] = [a_k - |\Delta a_k|; a_k + |\Delta a_k|]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и четыре "угловых"полинома (полиномы Харитонова)

(15) $$P_I = \underline{a}_n + \underline{a}_{n-1}\delta + \overline{a}_{n-2}\delta^2 + \overline{a}_{n-3}\delta^3 + \ldots,$$

(16) $$P_{II} = \overline{a}_n + \underline{a}_{n-1}\delta + \underline{a}_{n-2}\delta^2 + \overline{a}_{n-3}\delta^3 + \ldots,$$

(17) $$P_{III} = \overline{a}_n + \overline{a}_{n-1}\delta + \underline{a}_{n-2}\delta^2 + \underline{a}_{n-3}\delta^3 + \ldots,$$

(18) $$P_{IV} = \underline{a}_n + \overline{a}_{n-1}\delta + \overline{a}_{n-2}\delta^2 + \underline{a}_{n-3}\delta^3 + \ldots.$$

В силу теоремы Харитонова, если все корни полиномов (15-18) имеют отрицательные действительные части, то корни всех полиномов семейства (14) тоже имеют отрицательные действительные части. То есть все действительные корни полиномов (14) отрицательны, и квадратичная форма (2) является общей функцией Ляпунова систем вида (8) с определенными выше Δa_k.

2. Возможен и иной подход к решению поставленной задачи. Функция Ляпунова (2), построенная для системы (1), будет оставаться функцией Ляпунова и для системы (8), если a_n при изменении параметров системы не поменяет знака, т.е. знаки величин a_n и $a_n + \Delta a_n$ будут совпадать. Но поскольку

(19) $$|a_n + \Delta a_n| \geqslant |a_n| - |\Delta a_n|,$$

то $|a_n + \Delta a_n| > 0$, если будет положительной правая часть неравенства (19), а значит будет иметь место следующее утверждение:

Лемма 1. *Функция (2), являющаяся функцией Ляпунова для системы (1), будет оставаться функцией Ляпунова для системы (8), если*

(20) $$|\Delta a_n| < |a_n|,$$

где a_n и Δa_n ищутся в силу (7) и (12), а A_{km} и ΔA_{km} $(k, m = 1, 2, \ldots, n)$ определены соотношениями (5) и (9) соответственно.

Замечание 1. *Предположим, что квадратичная функция Ляпунова строится в соответствии с методикой работы [1], основанной на переходе к каноническим координатам и дающей функцию Ляпунова, удовлетворяющую условию $\max_{V=V_0} \dot{V}/V = \delta_0$ $(2\max_{i=1,\ldots,n}\{Re\lambda_i\} \leqslant \delta_0 < 0)$. Тогда все корни полинома (6) действительны, причем $\delta_1 \leqslant \delta_2 \leqslant \ldots \leqslant \delta_n = \delta_0 < 0$. В этом случае коэффициенты полинома $P_n(\delta)$ будут определяться как*

(21) $$a_1 = -(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n),\ a_2 = \delta_1\delta_2 + \delta_1\delta_3 + \ldots + \delta_{n-1}\delta_n,\ \ldots,\ a_n = (-1)^n\delta_1\delta_2\ldots\delta_n,$$

и именно они будут стоять в оценках коэффициентов полиномов (11),(14). Что же касается оценок второго метода, заметим, что

(22) $$|a_n| = |\delta_1\delta_2\ldots\delta_n| \geqslant |\delta_n|^n = |\delta_0|^n,$$

т.е.

$$|a_n + \Delta a_n| \geqslant |a_n| - |\Delta a_n| \geqslant |\delta_0|^n - |\Delta a_n|, \tag{23}$$

а значит, в этом случае, доказанная выше лемма может быть преобразована к виду:

Лемма 2. *Функция (2), являющаяся функцией Ляпунова для системы (1), и такая, что корни уравнения (4) действительны и* $\delta_1 \leqslant \delta_2 \leqslant \ldots \leqslant \delta_n = \delta < 0$, *будет оставаться функцией Ляпунова для (8), если*

$$|\Delta a_n| < |\delta_0|^n, \tag{24}$$

где Δa_n *ищется в силу (12).*

Список литературы

1. Антоновская О.Г. Об определении коэффициентов квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 3. С. 275-281.
2. Антоновская О.Г. О построении квадратичной функции Ляпунова с заданными свойствами // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 9. С. 1220-1224.
3. Антоновская О.Г. Построение квадратичных функций Ляпунова, удовлетворяющих заданным ограничениям, для непрерывных и дискретных динамических систем // Известия вузов. Математика. 2004. № 2 (501). С. 19-23.
4. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014. 560 с.
5. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002. 384 с.
6. Харитонов В.Л. Об устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14, № 11. С. 2086-2088.