

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРШИН МНОГОГРАННИКА КОЭФФИЦИЕНТОВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА СИСТЕМЫ ДЛЯ АНАЛИЗА СТЕПЕНИ РОБАСТНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ

**С.А. Гайворонский**

*Национальный исследовательский Томский политехнический университет*  
Россия, 634050, Томск, пр. Ленина, 30  
E-mail: [saga@tpu.ru](mailto:saga@tpu.ru)

**Т.А. Езангина**

*Национальный исследовательский Томский политехнический университет*  
Россия, 634050, Томск, пр. Ленина, 30  
E-mail: [eza-tanya@yandex.ru](mailto:eza-tanya@yandex.ru)

**Ключевые слова:** корневой годограф, интервальный характеристический полином, многогранник коэффициентов, степень робастной колебательности, интервальные фазовые неравенства, проверочные вершины.

**Аннотация:** Проведено интервальное расширение свойств корневого годографа для системы, описываемой характеристическим полиномом с интервальными коэффициентами. На основе фазового соотношения корневого годографа получены интервальные неравенства для углов выхода реберных ветвей из полюса, определяющего колебательность системы. В результате решения интервальных фазовых неравенств найдены проверочные вершины многогранника коэффициентов полинома для определения степени робастной колебательности систем низкого порядка. Приведен числовой пример.

## 1. Введение

Для систем автоматического управления с интервальными параметрами представляет интерес анализ робастной устойчивости - сохранение устойчивости при любых значениях параметров из известных интервалов. При этом более актуальным для проектировщика является гарантия обеспечения в системе допустимого качества функционирования. Известны работы, где анализ робастного качества интервальных систем управления (ИСУ) проводится с использованием корневого подхода, который является достаточно простым и наглядным [1-3].

В ИСУ при изменении параметров изменяются в интервалах и коэффициенты интервального характеристического полинома (ИХП), вследствие чего его корни мигрируют по комплексной плоскости. При этом корневыми показателями робастного качества являются степень робастной устойчивости (минимальная степень устойчивости) и степень робастной колебательности (СРК) (максимальная степень колебательности) ИСУ. Они могут быть найдены по границам областей локализации корней ИХП [4,5]. Известно [6], что в случае интервальности коэффициентов ИХП указанные показатели

определяются более просто - образами вершин многогранника коэффициентов. Однако проверка всех  $2^m$  вершин, где  $m$  – количество интервальных коэффициентов, является достаточно трудоемкой и излишней, так как большая часть образов вершин лежит внутри областей локализации корней. Определение граничных вершин, отображающихся на границы корневых областей, позволяет сократить число проверочных вершин [7,8]. В данной работе, используя основное фазовое соотношение теории корневого годографа, решается задача дополнительного уменьшения числа проверочных вершин для определения СРК в ИСУ низкого порядка.

## 2. Интервальное расширение углов выхода реберных ветвей из комплексного полюса

Запишем ИХП в виде:

$$(1) \quad A(s) = \sum_{i=0}^n [a_i] s^i = [a_n] s^n + [a_{n-1}] s^{n-1} + \dots + [a_0], [a_i] > 0,$$

где  $m = n + 1$  коэффициентов могут изменяться в известных пределах. Образующий этими коэффициентами многогранник  $M$  является прямоугольным гиперпараллелепипедом с вершинами  $V_q$ ,  $q = \overline{1, 2^m}$ . Координаты любой точки  $M$  относительно вершины  $V_q$ ,  $q = \overline{1, 2^m}$ , определяются выражениями

$$(2) \quad a_i = a_i^q + \Delta a_i, i = \overline{0, n}, (a_{i \min} - a_i^q) \leq \Delta a_i \leq (a_{i \max} - a_i^q),$$

где  $\Delta a_i$  – приращение  $i$ -го интервального коэффициента,  $a_i^q$  – его значение в вершине  $V_q$ . Верхний предел коэффициента  $a_i$  обычно обозначают символом  $\overline{a_i}$ , а его нижний предел – символом  $\underline{a_i}$ . Соотношение, связывающее точки  $M$  с корнями полинома (1), может быть получено подстановкой в (1) выражения (2):

$$(3) \quad A^q(s) + \sum_i \Delta a_i s^i = 0, i = \overline{0, n},$$

где  $A^q(s) = \sum_i a_i^q s^i$  – вершинный полином. На основании (3) запишем уравнение отображения ребра на плоскость корней

$$(4) \quad A^q(s) + \Delta a_i s^i = 0.$$

Согласно теории корневого годографа уравнение (4) может быть получено из реберной передаточной функции

$$(5) \quad W_i^q(\Delta a_i, s) = \frac{\Delta a_i s^i}{A^q(s)}.$$

Исходя из уравнения фаз корневого годографа [9], угол выхода реберной ветви из комплексного полюса  $P_1$  при увеличении  $a_i$  находится по формуле

$$(6) \quad \Theta_1^i = \pi - \sum_{p=2}^n \Theta_p + i\Theta_0,$$

а при уменьшении  $a_i$

$$(7) \quad \Theta_1^i = -\sum_{p=2}^n \Theta_p + i\Theta_0,$$

где  $\Theta_p$  и  $\Theta_0$  – углы между вещественной осью и векторами, направленными из  $P_1$  соответственно к  $p$ -ому полюсу и к  $i$ -м нулям с координатами  $(0; j0)$ .

Применим к углам в (6) и (7) интервальное расширение. Пусть СРК ИСУ определяется положением пары комплексно-сопряженных полюсов  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 1). Учитывая, что  $P_1$  может изменять свое положение внутри области локализации, угол  $\Theta_0$  будет лежать в интервале  $[\Theta_0]$ . Так как область локализации комплексного полюса  $P_1$  расположена во втором квадранте, то  $[\Theta_0] = [90^\circ; 180^\circ]$ . Интервальное расширение касается и углов  $\Theta_p$ , изменяющихся в своих интервалах  $[\Theta_p]$ .

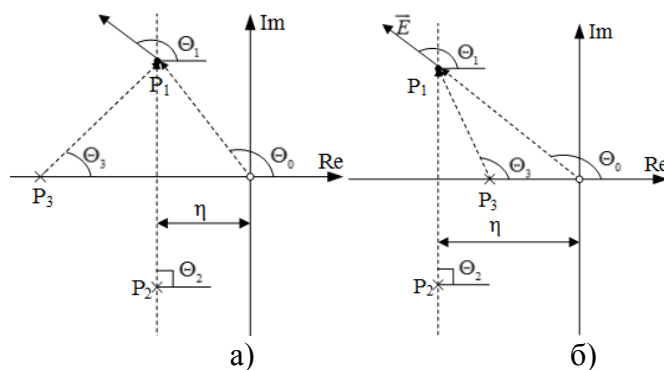


Рис. 1. Расположение вещественного полюса  $P_3$  а) левее  $P_1$  и  $P_2$ ; б) правее  $P_1$  и  $P_2$ .

Определим сумму  $[\Theta_p]$  для двух характерных случаев, когда левее или правее пары полюсов  $P_1$  и  $P_2$  лежит вещественный полюс  $P_3$  (рис. 1 а, б). При этом будем учитывать, что  $\Theta_2 = 90^\circ$ . На основании анализа возможного движения полюсов на рис. 1 сделаны следующие заключения.

- 1) Если вещественный полюс  $P_3$  мигрирует в отрезке, расположенном левее области локализации полюсов  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 1а), то угол  $[\Theta_3]$ , образованный полюсом  $P_3$  относительно полюса  $P_1$ , принадлежит интервалу  $[0^\circ; 90^\circ]$ .
- 2) Если вещественный полюс  $P_3$  мигрирует в отрезке, расположенном правее области локализации полюсов  $P_1$  и  $P_2$  (рисунок 1б), то угол  $[\Theta_3]$ , образованный полюсом  $P_3$  относительно полюса  $P_1$ , принадлежит интервалу  $[90^\circ; \Theta_0]$ .

Таким образом, в результате интервального расширения (6) и (7) получаем:

$$(8) \quad [\Theta_1^i] = \pi - \sum_{p=2}^n [\Theta_p] + i[\Theta_0];$$

$$(9) \quad [\Theta_1^i] = -\sum_{p=2}^n [\Theta_p] + i[\Theta_0].$$

### 3. Интервальные фазовые неравенства для полюса, определяющего колебательность системы

Если  $P_1$  определяет СРК, то все другие полюсы лежат в секторе  $\varphi = \pm\Theta_0$ . Поэтому необходимо наложить ограничения на углы выхода  $[\Theta_1^i]$

$$(10) \quad [\Theta_0] \leq [\Theta_1^i] \leq [\Theta_0] + \pi, i = \overline{0, n}.$$

Заметим, что двойные интервальные фазовые неравенства (10) для каких-то коэффициентов  $a_i$  могут не выполняться. Поэтому в (8) и (9) предлагается ввести слагаемое  $\pi r_i$ , где  $r_i = 0$  или  $r_i = 1$ . Выбор  $r_i = 0$  не меняет угол выхода корневого годографа по ребру  $a_i$ , а при  $r_i = 1$  угол изменяется на  $180^\circ$ . Это означает, что при выборе вершины нужно рассматривать оба предела коэффициента  $a_i$ . С учетом слагаемого  $\pi r_i$  запишем (10) в виде

$$(11) \quad [\Theta_0] \leq [\Theta_0] \cdot i - \sum_{p=2}^n [\Theta_p] \pm \pi r_i \leq [\Theta_0] + \pi, i = \overline{0, n}.$$

Неравенства (11) назовем интервальными фазовыми неравенствами (ИФН).

### 4. Проверочные вершины для определения степени робастной колебательности

На основании приведенных выше заключений 1 и 2 определим проверочные вершины для ИСУ второго и третьего порядков. Запишем ИФН (11) для ИСУ второго порядка

$$(12) \quad [\Theta_0] \leq [\Theta_0] \cdot i - 90^\circ \pm \pi r_i \leq [\Theta_0] + \pi, i = \overline{0, 2}.$$

Преобразуем (12) к виду

$$(13) \quad 90^\circ \leq [90^\circ; 180^\circ] \cdot (i-1) \pm \pi r_i \leq 270^\circ, i = \overline{0, 2}.$$

Решая (13), получаем при  $i=0, r_0=0$ ; при  $i=1, r_1=1$ ; при  $i=2, r_2=0$ . Следовательно, проверочная вершина  $V_1(\overline{a_0}, \overline{a_1}, \overline{a_2})$ .

Для системы третьего порядка рассмотрим вначале случай, когда левее пары полюсов  $P_1$  и  $P_2$  лежит вещественный полюс  $P_3$ . Тогда на основании заключения 1 ИФН будет иметь вид

$$(14) \quad [\Theta_0] \leq [\Theta_0] \cdot i - 90^\circ - [0^\circ; 90^\circ] \pm \pi r_i \leq [\Theta_0] + \pi, i = \overline{0, 3}.$$

В результате преобразования (14) получаем:

$$(15) \quad 90^\circ \leq [90^\circ(i-1) - 90^\circ; 180^\circ(i-1)] \pm \pi r_i \leq 270^\circ, i = \overline{0, 3}.$$

Решением (15) являются значения  $r_0=0$ ;  $r_1=1$ ;  $r_2=0$  или  $r_2=1$ ,  $r_3=0$  или  $r_3=1$ . Этим значениям соответствуют координаты следующих проверочных вершин  $V_1(\overline{a_0}, \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ ,  $V_2(\overline{a_0}, \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ ,  $V_3(\overline{a_0}, \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ ,  $V_4(\overline{a_0}, \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ . Заметим, что вершина  $V_4(\overline{a_0}, \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$  не является граничной [10], так как три ее последовательные координаты имеют один и тот же минимальный предел. Поэтому данная вершина не может быть проверочной для определения степени робастной колебательности.

Во втором случае если вещественный полюс  $P_3$  лежит правее пары полюсов  $P_1$  и  $P_2$ , то на основании заключения 2 запишем ИФН в следующем виде:

$$(16) \quad [\Theta_0] \leq [\Theta_0] \cdot i - 90^\circ - [90^\circ; [\Theta_0]] \pm \pi r_i \leq [\Theta_0] + \pi, i = \overline{0, 3}.$$

В результате преобразования (16) можно записать ИФН двумя способами

$$(17) \quad 90^\circ \leq [90^\circ(i-1) - 180^\circ; 180^\circ(i-1) - 90^\circ] \pm \pi r_i \leq 270^\circ, i = \overline{0, 3};$$

$$(18) \quad 90^\circ \leq [90^\circ; 180^\circ] \cdot (i-2) \pm \pi r_i \leq 270^\circ, i = \overline{0, 3}.$$

На основе свойства субдистрибутивности интервальных вычислений [11] при возможности записи интервальных выражений (16) двумя способами необходимо использовать те выражения, которые для каждого значения  $i$  дают более узкий интервал. Исходя из этого, решением (17) и (18) являются координаты вершины  $V_4(\overline{a_0}, \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ .

Таким образом, СРК ИСУ третьего порядка находится на основе анализа корней ИХП в четырех вершинах  $V_1(\overline{a_0}, \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ ,  $V_2(\overline{a_0}, \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ ,  $V_3(\overline{a_0}, \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ ,  $V_4(\overline{a_0}, \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ .

## 5. Числовой пример

Пусть задан ИХП  $[a_3] \cdot s^3 + [a_2] \cdot s^2 + [a_1] \cdot s + [a_0] = 0$  с коэффициентами  $[a_0] = [8; 10]$ ,  $[a_1] = [6.64; 6.94]$ ,  $[a_2] = [1.72; 1.95]$ ,  $[a_3] = [0.15; 0.5]$ . Для анализа СРК найдены значения корней ИХП в определенных выше проверочных вершинах. Установлено, что СРК определяется корнями  $s_{1,2} = -0,755 \pm 3,13j$ , являющимися образами вершины  $V_2(\overline{a_0}, \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ . Для проверки построены области локализации корней ИХП (рис. 2). Из рисунка видно, что  $\varphi = \pm 76^\circ$  (СРК  $\mu = 4.173$ ) и определяется образом вершины  $V_2(\overline{a_0}, \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ .

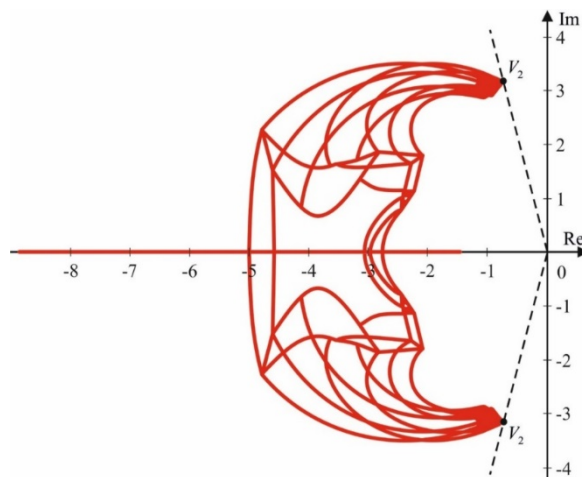


Рис. 2. Область локализации корней ИХП.

## 6. Заключение

В работе проведено интервальное расширение основного фазового соотношения теории корневого годографа для системы с ИХП. На его основе получены интервальные фазовые неравенства, задающие диапазон углов выхода реберных ветвей из полюса, определяющего степень колебательности ИСУ. В результате решения интервальных фазовых неравенств определены проверочные вершины многогранника коэффициентов ИХП для нахождения СРК систем низкого порядка. Приведенный числовой пример подтверждает правильность полученных результатов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-58-00045Бел\_а).

## Список литературы

1. Несенчук А.А. Анализ и синтез робастных динамических систем на основе корневого подхода. Минск: ОИПИ, 2005. 232 с.
2. Римский, Г.В. Корневые методы исследования интервальных систем. Минск: Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 1999. 186 с.
3. Barmish, B. R., Tempo R. The robust root locus // *Automatica*. 1990. Vol. 26, No. 2. P. 283-292.
4. Вадутов О.С., Гайворонский С.А. Применение реберной маршрутизации для анализа устойчивости интервальных полиномов // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2003. № 6. С. 7-12.
5. Barlett, A.C., Hollot C.V., Lin H. Root location of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges // *Mathematics of Controls, Signals and Systems*. 1988. Vol. 1. P. 61-71.
6. Гусев Ю.М., Ефанов В.Н., Крымский В.Г. Анализ и синтез линейных интервальных динамических систем (состояние проблемы). Анализ с использованием интервальных характеристических полиномов // *Техническая кибернетика*. 1991. № 1. С. 3-30.
7. Гайворонский С.А. Вершинный анализ локализации корней интервального полинома в заданном секторе // *Проблемы управления '06: труды третьей международной конференции по проблемам управления*. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2006. С. 180-186.
8. Wang Z., Wang L., Yu W. Determinative vertices of interval family with  $\Omega$ -stability // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2002. Vol. 266, No. 2. P. 321-332.
9. Удерман, Э.Г. Метод корневого годографа в теории автоматических систем. М.: Наука, 1972. 448 с
10. Гайворонский С.А. Определение реберного маршрута для анализа робастной секторной устойчивости интервального полинома // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2005. № 5. С. 11-15.
11. Калмыков С.А., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986. 222 с.