

УДК 519.71

УПРАВЛЕНИЕ ВЗЛЕТОМ САМОЛЕТА В УСЛОВИЯХ СДВИГА ВЕТРА

А.Е. Голубев

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5

E-mail: v-algolu@hotmail.com

Н.В. Уткина

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5

E-mail: v-algolu@hotmail.com

Ключевые слова: обратная задача динамики, стабилизация, бэкстеппинг, ограничения на состояния.

Аннотация: Рассмотрена задача управления взлетом самолета в условиях сдвига ветра. Использована математическая модель движения самолета в вертикальной плоскости как материальной точки. Предложен алгоритм построения программного движения при наличии ограничений на состояния системы. Для синтеза стабилизирующего управления применен метод обхода интегратора (бэкстеппинг).

1. Математическая модель продольной динамики самолета и постановка задачи

Рассмотрим динамику центра масс самолета в присутствии сдвига ветра [2, 5–8]. Будем полагать, что масса самолета постоянная, движение происходит только в вертикальной плоскости, плотность атмосферы постоянна. Отметим, что указанные допущения типичны при моделировании режима взлета самолета [5]. Пренебрежем также инерцией вращения самолета вокруг центра масс. Уравнения движения центра масс самолета записываются следующим образом [7]:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= V \cos \gamma + W_x, \\
 \dot{h} &= V \sin \gamma + W_h, \\
 \dot{V} &= \frac{1}{m} (T \cos(\alpha + \delta) - D - mg \sin \gamma) - (\dot{W}_x \cos \gamma + \dot{W}_h \sin \gamma), \\
 \dot{\gamma} &= \frac{1}{mV} (T \sin(\alpha + \delta) + L - mg \cos \gamma) + \frac{1}{V} (\dot{W}_x \sin \gamma - \dot{W}_h \cos \gamma),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

где x и h – горизонтальная и вертикальная координаты центра масс в земной инерциальной системе координат соответственно; V – модуль вектора скорости центра

масс относительно потока воздуха; W_x и W_h – соответственно горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости потока воздуха относительно инерциальной системы координат, характеризующие сдвиг ветра; $L = L(V, \alpha)$ – аэродинамическая подъемная сила; $D = D(V, \alpha)$ – аэродинамическая сила сопротивления; $T = T(V)$ – сила тяги; α – относительный угол атаки; γ – относительный угол наклона траектории; δ – постоянный угол наклона вектора силы тяги относительно оси симметрии летательного аппарата; m – масса самолета; g – ускорение свободного падения.

В системе (1) сила тяги и аэродинамические силы имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} T &= \delta_T(A_0 + A_1V + A_2V^2), \\ D &= \frac{1}{2}C_D(\alpha)\rho SV^2, \quad C_D(\alpha) = B_0 + B_1\alpha + B_2\alpha^2, \\ L &= \frac{1}{2}C_L(\alpha)\rho SV^2, \\ C_L(\alpha) &= \begin{cases} C_0 + C_1\alpha, & 0 < \alpha < \alpha_{**}, \\ C_0 + C_1\alpha + C_2(\alpha - \alpha_{**})^2, & \alpha \geq \alpha_{**}, \end{cases} \end{aligned}$$

где $\delta_T \in [0, 1]$ – переменная управления величиной силы тяги; S – расчетная площадь; ρ – плотность атмосферы (постоянная); $A_i, B_i, C_i, i = \overline{0, 2}, \alpha_{**}$ – константы, зависящие от типа самолета и условий внешней среды [7, 8].

В качестве управляющих переменных в системе (1) будем рассматривать относительный угол атаки α и переменную δ_T . Далее для удобства определим соответственно продольную и поперечную перегрузки

$$n_x = \frac{1}{mg}(T \cos(\alpha + \delta) - D), \quad n_h = \frac{1}{mg}(T \sin(\alpha + \delta) + L).$$

Тогда система (1) запишется следующим образом:

$$(2) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= V \cos \gamma + W_x, \\ \dot{h} &= V \sin \gamma + W_h, \\ \dot{V} &= (n_x - \sin \gamma)g - (\dot{W}_x \cos \gamma + \dot{W}_h \sin \gamma), \\ \dot{\gamma} &= \frac{1}{V}(n_h - \cos \gamma)g + \frac{1}{V}(\dot{W}_x \sin \gamma - \dot{W}_h \cos \gamma), \end{aligned}$$

где переменные n_x и n_h рассмотрим в качестве новых управлений.

В настоящей работе решается задача синтеза законов управления $n_x = n_x(x, h, V, \gamma)$ и $n_h = n_h(x, h, V, \gamma)$, обеспечивающих выполнение для решений замкнутой системы (2) при всех $t > 0$ условий $h(t) > 0, V(t) \in [\underline{V}, \bar{V}], \gamma(t) \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]$, где $\underline{V}, \bar{V}, \underline{\gamma}, \bar{\gamma}$ – постоянные, зависящие от типа самолета. Горизонтальную W_x и вертикальную W_h компоненты вектора скорости потока воздуха, а также их производные по времени \dot{W}_x и \dot{W}_h соответственно будем рассматривать как возмущения и считать неизвестными непрерывными ограниченными функциями времени. Будем полагать, что при всех $t \geq 0$ справедливы неравенства $|W_h(t)| \leq D_1, |\dot{W}_h(t)| \leq D_2$, где D_1, D_2 – некоторые положительные постоянные.

2. Синтез программного и стабилизирующего управлений

Для решения рассматриваемой задачи управления запишем систему (2) в новых переменных состояния

$$(3) \quad x_1 = h, \quad x_2 = \dot{h} = V \sin \gamma, \quad x_3 = x, \quad x_4 = \dot{x} = V \cos \gamma.$$

Заметим, что соотношения (3) в области \mathbb{R}^4 , заданной неравенствами $|\gamma| < \pi/2$, $V > 0$, определяют гладкую невырожденную замену переменных. В выбранных переменных система (2) имеет вид

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + W_h, \\ \dot{x}_2 &= -g + gn_x \sin \gamma + gn_h \cos \gamma - \dot{W}_h, \\ \dot{x}_3 &= x_4 + W_x, \\ \dot{x}_4 &= gn_x \cos \gamma - gn_h \sin \gamma - \dot{W}_x. \end{aligned}$$

Используем далее новые управления

$$u_1 = -g + gn_x \sin \gamma + gn_h \cos \gamma, \quad u_2 = gn_x \cos \gamma - gn_h \sin \gamma.$$

Тогда переменные n_x и n_h выражаются через u_1 и u_2 следующим образом:

$$n_x = \left(\frac{u_1}{g} + 1\right) \sin \gamma + \frac{u_2}{g} \cos \gamma, \quad n_h = \left(\frac{u_1}{g} + 1\right) \cos \gamma - \frac{u_2}{g} \sin \gamma$$

и система (4) примет вид

$$(5) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + W_h, & \dot{x}_3 &= x_4 + W_x, \\ \dot{x}_2 &= u_1 - \dot{W}_h, & \dot{x}_4 &= u_2 - \dot{W}_x. \end{aligned}$$

Построим сначала программную траекторию системы (5) по переменной x_1 , соответствующей высоте h центра масс самолета над поверхностью Земли. Фиксируем произвольные начальные значения $x_1(0) = h_0$, $x_2(0) = \dot{h}_0$ и желаемые конечные значения $x_1(t_*) = h_*$, $x_2(t_*) = \dot{h}_*$ соответственно высоты и скорости набора высоты центра масс самолета. Для соединения на фазовой плоскости двух точек (h_0, \dot{h}_0) и (h_*, \dot{h}_*) воспользуемся многочленом третьего порядка, имеющим вид [1]

$$(6) \quad h_r(t) = h_0 + \dot{h}_0 t + c_1 t^2 + c_2 t^3,$$

где

$$c_1 = -((2\dot{h}_0 + \dot{h}_*)t_* + 3(h_0 - h_*))/t_*^2, \quad c_2 = ((\dot{h}_0 + \dot{h}_*)t_* + 2(h_0 - h_*))/t_*^3.$$

Фазовый график $\bar{h}_r(t) = (h_r(t), \dot{h}_r(t))$, $t \in [0, t_*]$, многочлена (6) соединяет точки (h_0, \dot{h}_0) и (h_*, \dot{h}_*) на фазовой плоскости, причем $h_r(t_*) = h_*$, $\dot{h}_r(t_*) = \dot{h}_*$.

Далее, воспользуемся свободой выбора времени t_* движения на фазовой плоскости из точки (h_0, \dot{h}_0) в точку (h_*, \dot{h}_*) . Заметим, что одним из способов выполнения ограничений по модулю на программные значения переменных x_1 , x_2 состояния системы (5) при нулевых значениях возмущений W_h , \dot{W}_h является монотонность многочлена (6) и его производной по времени на отрезке $t \in [0, t_*]$. Выбрав согласно

работам [1, 3] значение $t_* = 2(h_* - h_0)/(\dot{h}_0 + \dot{h}_*)$, получим $c_2 = 0$ и при $h_* > h_0$, $\dot{h}_0 > 0$, $\dot{h}_* > 0$ справедливо неравенство $t_* > 0$. Легко убедиться, что в этом случае соответствующий многочлен (6) и его производная по времени представляют собой строго монотонные функции t на отрезке $t \in [0, t_*]$.

Программное управление $u_1 = u_1(t)$, найденное согласно методу обратных задач динамики и являющееся решением рассмотренной выше терминальной задачи для h подсистемы системы (5) при нулевых значениях возмущений W_h, \dot{W}_h , запишется следующим образом [1]:

$$(7) \quad u_1 = \ddot{h}_r(t).$$

При ненулевых значениях возмущений W_h, \dot{W}_h в первых двух уравнениях системы (5) рассмотрим переменные ошибки $\xi_1 = x_1 - h_r(t)$ и $\xi_2 = x_2 - \dot{h}_r(t)$, динамика которых имеет вид

$$(8) \quad \begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2 + W_h, \\ \dot{\xi}_2 &= v_1 - \dot{W}_h, \end{aligned}$$

где $v_1 = u_1 - \ddot{h}_r(t)$ – новая переменная управления. Для стабилизации нулевых значений переменных $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ возмущенной системы (8) при наличии ограничений вида $|\xi_i(t)| \leq M_i$ при всех $t \in [0, t_*]$, $i = 1, 2$, воспользуемся методом синтеза управления на основе обхода интегратора (бэкстепинга) [4], изложенным в работе [9]. Построенное стабилизирующее управление запишется следующим образом:

$$(9) \quad v_1 = -(c_3 + c_4 + c_5)z_2 - (c_1 + c_2)\xi_2 - \frac{k_1 z_1(N_2^2 - z_2^2)}{k_2(N_1^2 - z_1^2)},$$

где k_1, k_2 – произвольные положительные константы, $z_1 = \xi_1$, $z_2 = \xi_2 + (c_1 + c_2)z_1$, $N_1 = M_1$, $N_2 = M_2 - (c_1 + c_2)M_1$. Положительные постоянные M_1, M_2 и $c_i, i = \overline{1, 5}$, выбираются таким образом, что выполнены неравенства

$$\frac{D_1}{\sqrt{4c_1c_2}} < N_1, \quad \sqrt{\frac{D_2^2}{4c_3c_4} + \frac{(c_1 + c_2)^2 D_1^2}{4c_3c_5}} < N_2.$$

Далее, аналогично работе [9] можно показать, что для решений системы (8), замкнутой управлением (9), при всех $t \in [0, t_*]$ имеют место неравенства $|z_1(t)| \leq N_1$, $|z_2(t)| \leq N_2$, что равносильно выполнению условий $|\xi_1(t)| \leq M_1$, $|\xi_2(t)| \leq M_2$. Более того, согласно работе [10] замкнутая управлением (9) система (8) обладает свойством устойчивости по отношению к возмущениям входа $(W_h, \dot{W}_h)^T$ [10] и для любых начальных условий $\xi_1(0) = \xi_1^0$, $\xi_2(0) = \xi_2^0$ таких, что $|\xi_1^0| \leq M_1$, $|\xi_2^0| \leq M_2$, и любых положительных чисел $\varepsilon_1 < M_1$, $\varepsilon_2 < M_2$, существуют такое значение независимой переменной $t = t_1 \geq 0$, зависящее от ξ_1^0 и ξ_2^0 , и положительные постоянные $c_i, i = \overline{1, 5}$, что для соответствующего решения $\xi_1 = \xi_1(t)$, $\xi_2 = \xi_2(t)$ системы (8) с управлением (9) при всех $t \geq t_1$ справедливо неравенство $|\xi_1(t)| \leq \varepsilon_1$, $|\xi_2(t)| \leq \varepsilon_2$.

Таким образом, для любых заданных начальных значений $x_1(0) = h_0$, $x_2(0) = \dot{h}_0$ и произвольных положительных постоянных D_1, D_2 всегда можно выбрать значения констант $M_i, i = 1, 2$, и $c_i, i = \overline{1, 5}$, таким образом, что для произвольного положительного $N < \dot{h}_0$ и соответствующего решения h подсистемы системы (5), замкнутой управлением

$$u_1 = -(c_3 + c_4 + c_5)(c_1 + c_2)(x_1 - h_r(t)) - (c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5)(x_2 - \dot{h}_r(t)) +$$

$$+\ddot{h}_r(t) - \frac{k_1(x_1 - h_r(t)) \left(N_2^2 - (x_2 - \dot{h}_r(t) + (c_1 + c_2)(x_1 - h_r(t)))^2 \right)}{k_2(N_1^2 - (x_1 - h_r(t))^2)},$$

при всех $t \in [0, t_*]$ выполнено $x_1(t) = h(t) > 0$ и $0 < \dot{h}_0 - N \leq x_2(t) = \dot{h}(t) \leq \dot{h}_0 + N$.

Далее, аналогичным образом построив программное движение по переменным x_3, x_4 для x подсистемы системы (5) и соответствующее стабилизирующее управление $u_2 = u_2(x_3, x_4)$, обеспечим выполнение условия $0 < \dot{x}_0 - M \leq x_4(t) = \dot{x}(t) \leq \dot{x}_0 + M$ при всех $t \in [0, t_*]$, где M – произвольная положительная постоянная, $M < \dot{x}_0$.

Наконец, выбрав надлежащим образом положительные постоянные N и M , в силу соотношений $x_2(t) = V(t) \sin(\gamma(t))$ и $x_4(t) = V(t) \cos(\gamma(t))$ обеспечим выполнение условий $V(t) \in [\underline{V}, \bar{V}]$ и $\gamma(t) \in [\underline{\gamma}, \bar{\gamma}]$ при всех $t \in [0, t_*]$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 19-07-00817 и 17-07-00653).

Список литературы

1. Голубев А.Е. Крищенко А.П. Решение терминальной задачи управления для аффинной системы при помощи многочленов // Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. № 2. С. 101-114.
2. Chen Y.H., Pandey S. Robust control strategy for take-off performance in a windshear // Optimal Control Applications and Methods. 1989. Vol. 10, No. 1. P. 65-79.
3. Golubev A.E., Krishchenko A.P., Utkina N.V., Velishchanskiy M.A. Solution of a terminal control problem under state constraints // IFAC-PapersOnLine. 2017. Vol. 50, No. 1. P. 10679-10684.
4. Krstić M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V. Nonlinear and adaptive control design. New York: John Wiley and Sons, 1995. 563 p.
5. Leitmann G., Pandey S. Adaptive control of aircraft in windshear // International journal of robust and nonlinear control. 1993. Vol. 3. P. 133-153.
6. Martynov K., Botkin N., Turova V., Diepolder J. Real-time control of aircraft take-off in windshear. Part I: aircraft model and control schemes // Proceedings of the 25th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). Valletta, Malta. 2017. P. 277-284.
7. Miele A., Wang T., Melvin W.W. Optimal take-off trajectories in the presence of windshear // Journal of optimization theory and applications. 1986. Vol. 49, No. 1. P. 1-45.
8. Miele A., Wang T., Melvin W.W. Guidance strategies for near-optimum take-off performance in a windshear // Journal of optimization theory and applications. 1986. Vol. 50, No. 1. P. 1-47.
9. Ngo K.B., Mahony R., Jiang Z.P. Integrator backstepping using barrier functions for systems with multiple state constraints // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference. Seville, Spain. 2005. P. 8306-8312.
10. Sontag E.D., Wang Y. New characterizations of input to state stability // IEEE transactions on automatic control. 1996. Vol. 41, No. 9. P. 1283-1294.