УДК 519.7

ОЦЕНИВАНИЕ ОТКЛОНЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ В ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ С МАТРИЧНОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Я.И. Квинто

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: yanakvinto@mail.ru

М.В. Хлебников

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: khlebnik@ipu.ru

Ключевые слова: линейная дискретная система управления, отклонение траектории, линейные матричные неравенства, функция Ляпунова, структурированная матричная неопределенность.

Аннотация: Исследуется эффект отклонения траекторий линейных систем в дискретном времени при ненулевых начальных условиях. Получены верхние оценки отклонения для систем, содержащих структурированную матричную неопределенность. На основе техники линейных матричных неравенств решена задача минимизации величины отклонений при стабилизации системы с помощью статической линейной обратной связи по состоянию.

1. Введение

Рассмотрим линейную систему в дискретном времени

$$x_{k+1} = Ax_k, \tag{1}$$

с состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, *ненулевым* начальным условием x_0 и устойчивой (шуровской) матрицей $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Как известно, одной из важнейших характеристик переходного процесса является величина максимального отклонения траектории $x(t)$ системы от нуля, а именно величина

$$\xi(x_0) = \max_{k=1,2,\dots} \frac{|x_k|}{|x_0|},$$

где $|\cdot|$ — некоторая векторная норма.

В работах [3,6] исследовался эффект больших отклонений траекторий при ненулевых начальных условиях для непрерывных систем; в частности, было показано, что техника линейных матричных неравенств [7,8] позволяет синтезировать линейную обратную связь, минимизирующую величину отклонения траектории в системе управления вида

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

а также предоставляет простые, но достаточно точные верхние оценки величины максимального отклонения. Также задачи синтеза для дискретных систем с различного вида неопределенностями рассматривались, например, в [2,4] и др.

Настоящая работа является естественным развитием идеи, предложенной в [3] для динамических систем в непрерывном времени. В качестве основного инструмента используются построение общей квадратичной функции Ляпунова для семейства систем с неопределенностями, а также метод инвариантных эллипсоидов [5].

В дальнейшем изложении все матричные неравенства понимаются в смысле знакоопределенности матриц.

2. Задача анализа

Рассмотрим линейную динамическую систему в дискретном времени

$$x_{k+1} = (A + F\Delta H)x_k, \tag{2}$$

с заданными матрицами $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $H \in \mathbb{R}^{q\times n}$, фазовым состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, ненулевым начальным условием x_0 и ограниченной матричной неопределенностью

$$\Delta \in \mathbb{R}^{p\times q}\colon \quad \|\Delta\|_2 \leqslant \gamma.$$

Единственное требование к матричной неопределенности Δ — ее ограниченность по норме. Таким образом, все устанавливаемые далее результаты остаются справедливыми и для случая нестационарной неопределенности

$$\Delta(t)\colon \quad \|\Delta(t)\| \leqslant \gamma.$$

Матрица A системы (2) предполагается шуровской, т.е. все ее собственные значения лежат внутри единичного круга.

Для дискретной системы максимальное отклонение траектории дается выражением

$$\widehat{\xi} = \max_{\|\Delta\|_2\leqslant\gamma} \xi(\Delta) = \max_{\|\Delta\|_2\leqslant\gamma} \max_{k=1,2,\ldots} \max_{|x_0|_2=1} |x_k|_2 = \max_{\|\Delta\|_2\leqslant\gamma} \max_{k=1,2,\ldots} \|A^k\|_2.$$

В целом, получение оценок величины $\widehat{\xi}$ представляет собой весьма сложную задачу [6]. Ниже мы получим простые и пригодные для практического применения верхние оценки отклонения путем построения общей квадратичной функции Ляпунова с применением техники линейных матричных неравенств.

Как хорошо известно, достаточное условие робастной квадратичной устойчивости семейства (2) состоит в наличии общей квадратичной функции Ляпунова. А именно, выполнение неравенства Ляпунова

$$(A + F\Delta H)P(A + F\Delta H)^\top - P \prec 0 \tag{3}$$

с некоторой матрицей $P \succ 0$ при всех допустимых значениях неопределенности Δ означает, что у семейства (2) есть общая квадратичная функция Ляпунова

$$V(x) = x^\top P^{-1} x.$$

Последовательно применяя лемму Шура и лемму Питерсена [9], представим матричное неравенство (3) в виде эквивалентного линейного матричного неравенства относительно матричной переменной $P \succ 0$ и скалярной переменной ε:

$$\begin{pmatrix} P - \varepsilon\gamma^2 FF^\top & AP & 0 \\ PA^\top & P & PH^\top \\ 0 & HP & \varepsilon I \end{pmatrix} \succ 0. \tag{4}$$

Таким образом, разрешимость неравенства (4) является достаточным условием робастной квадратичной устойчивости семейства (2), см. подробнее [7].

Далее, рассмотрим эллипсоид

$$\mathcal{E} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad x^\top P^{-1} x \leqslant 1\right\}$$

с матрицей $P \succ 0$, удовлетворяющей условию (4). Согласно [7], если $\mathcal{E}$ содержит единичный шар

$$\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad |x|_2 \leqslant 1\},$$

то *для любого* начального условия из шара $\mathcal{B}$ траектория системы не покинет эллипсоид $\mathcal{E}$, и в каждый момент времени для ее 2-нормы верна оценка

$$|x(t)|_2 \leqslant \lambda_{\max}(P) = \sqrt{\|P\|_2}.$$

Остается заметить, что условие $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$ эквивалентно требованию $P \succcurlyeq I$, и мы приходим к следующему результату.

Теорема 1. *Пусть $\widehat{P}$ — решение задачи выпуклой оптимизации*

$$\min \|P\|_2$$

при ограничениях

$$\begin{pmatrix} P - \varepsilon\gamma^2 FF^\top & AP & 0 \\ PA^\top & P & PH^\top \\ 0 & HP & \varepsilon I \end{pmatrix} \succ 0, \quad P \succcurlyeq I,$$

относительно матричной переменной $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и скалярной переменной ε.

Тогда для решений системы (2) справедлива оценка отклонения

$$\widehat{\xi} \leqslant \sqrt{\|\widehat{P}\|_2}$$

при всех допустимых неопределенностях Δ.

Задача, сформулированная в теореме 1, сводится к задаче полуопределенного программирования и легко решается численно.

3. Задача синтеза

В этом разделе мы рассмотрим систему управления вида

$$x_{k+1} = (A + F\Delta_1 H + M\Delta_2 N)x_k + Bu_k, \tag{5}$$

с заданными матрицами $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $F \in \mathbb{R}^{n\times p}$, $H \in \mathbb{R}^{q\times n}$, $M \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $N \in \mathbb{R}^{s\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, фазовым состоянием $x_k \in \mathbb{R}^n$, ненулевым начальным условием x_0, управлением $u_k \in \mathbb{R}^m$ и матричными неопределенностями Δ_1 и Δ_2 такими, что

$$\Delta_1 \in \mathbb{R}^{p\times q}\colon\ \|\Delta_1\|_2 \leqslant \gamma_1, \qquad \Delta_2 \in \mathbb{R}^{r\times s}\colon\ \|\Delta_2\|_2 \leqslant \gamma_2;$$

пара (A, B) предполагается управляемой.

Размах неопределенностей Δ_1 и Δ_2 можно считать общим за счет масштабирования «обрамляющих» матриц F, H, M и N [7]; обозначим его γ:

$$\|\Delta_i\|_2 \leqslant \gamma, \qquad i = 1, 2.$$

Будем искать стабилизирующую статическую линейную обратную связь по состоянию

$$u_k = Kx_k, \quad K \in \mathbb{R}^{m\times n}, \tag{6}$$

минимизирующую величину максимального отклонения в замкнутой системе (5), (6).

Замкнув систему (5) обратной связью (6), приходим к замкнутой системе

$$x_{k+1} = (A + BK + F\Delta_1 H + M\Delta_2 N)x_k. \tag{7}$$

Построим общую квадратичную функцию Ляпунова для семейства (7) такую, что ее матрица минимальна по спектральной норме. При мы приходим к условию

$$(A + BK + F\Delta_1 H + M\Delta_2 N)P(A + BK + F\Delta_1 H + M\Delta_2 N)^\top - P \prec 0.$$

Применив модификацию леммы Питерсена для случая нескольких неопределенностей [7], справедливую в достаточной части, введя вспомогательную матричную переменную $Y = KP$ и следуя идее доказательства теоремы 1, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\widehat{P}$, $\widehat{Y}$ — решение задачи выпуклой оптимизации*

$$\min \|P\|_2$$

при

$$\begin{pmatrix} P - \gamma^2(\varepsilon_1 FF^\top + \varepsilon_2 MM^\top) & AP + BY & 0 & 0 \\ PA^\top + Y^\top B^\top & P & PH^\top & PN^\top \\ 0 & HP & \varepsilon_1 I & 0 \\ 0 & NP & 0 & \varepsilon_2 I \end{pmatrix} \succ 0,$$
$$P \succcurlyeq I,$$

относительно матричных переменных $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и скалярных переменных ε_1, ε_2.

Тогда для решений системы (5), замкнутой регулятором (6) с матрицей

$$\widehat{K} = \widehat{Y}\widehat{P}^{-1},$$

справедлива оценка отклонения

$$\widehat{\xi} \leqslant \sqrt{\|\widehat{P}\|_2}$$

при всех допустимых значениях неопределенностей Δ_1 и Δ_2.

4. Заключение

Продолжено изучение эффекта больших отклонений траекторий линейных систем с ненулевыми начальными условиями. Установлены простые верхние оценки отклонений для дискретных линейных систем при наличии структурированной матричной неопределенности в матрице системы. Предложен простой подход к минимизации отклонений в линейных дискретных системах управления при помощи статической линейной обратной связи по состоянию. Численное моделирование демонстрирует низкую степень консерватизма полученных оценок.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-08-00140).

Список литературы

1. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
2. Дорофеев Ю.И. Применение линейных матричных неравенств в задаче синтеза оптимального управления запасами при наличии структурных ограничений // Міжвідомчий науково-технічний збірник «Адаптивні системи автоматичного управління». 2015. № 1 (26). С. 13-25.
3. Квинто Я.И., Хлебников М.В. Верхние оценки больших отклонений в линейных системах при наличии неопределенности // Проблемы управления. 2018. № 3. С. 2-7.
4. Коган М.М., Кривдина Л.Н. Синтез многоцелевых линейных законов управления дискретными объектами при интегральных и фазовых ограничениях // Автоматика и телемеханика. 2011. № 7. С. 83-95.
5. Поляк Б.Т., Топунов М.В., Щербаков П.С. Идеология инвариантных эллипсоидов в задаче о робастном подавлении ограниченных внешних возмущений // Стохастическая оптимизация в информатике. 2007. Т. 3, № 1-1. С. 51-84.
6. Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербаков П.С., Смирнов Г.В. Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // Автоматика и телемеханика. 2015. № 6. С. 18-41.
7. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Щербаков П.С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: ЛЕНАНД, 2014.
8. Boyd S., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory. Philadelphia: SIAM, 1994.
9. Petersen I.R. A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems // Systems and Control Letters. 1987. Vol. 8. P. 351-357.