

# РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ МОБИЛЬНОГО РОБОТА С ОМНИ-КОЛЕСАМИ

**О.А. Перегудова**

*Ульяновский государственный университет*  
Россия, 432017, Ульяновск, Л. Толстого ул., 42  
E-mail: [peregudovaoa@gmail.com](mailto:peregudovaoa@gmail.com)

**И.В. Кудашкина**

*Ульяновский государственный университет*  
Россия, 432017, Ульяновск, Л. Толстого ул., 42  
E-mail: [rekryt.com@gmail.com](mailto:rekryt.com@gmail.com)

**Р.И. Хасанова**

*Ульяновский государственный университет*  
Россия, 432017, Ульяновск, Л. Толстого ул., 42  
E-mail: [rezxas@mail.ru](mailto:rezxas@mail.ru)

**Ключевые слова:** управление, мобильный робот, омни-колесо, проскальзывание колес, стабилизация, программное движение.

**Аннотация:** В докладе представлено решение задачи о робастной стабилизации программного движения мобильного робота с тремя омни-колесами. Для динамической модели робота со смещенным центром масс, учитывающей проскальзывание колес построен робастный закон управления без измерения скоростей. Построенный закон управления состоит из программной составляющей и части по обратной связи по положению, представляющей собой ограниченную функцию. Получена теорема о предельной ограниченности замкнутой системы. Робастность закона управления заключается в решении задачи стабилизации при неточно известных параметрах системы и произвольно изменяющихся коэффициентах, характеризующих скольжение робота при торможении.

## 1. Введение

Задачам динамики и управления движением мобильных роботов с омни-колесами посвящено большое количество работ (см. напр. [1–15]). При этом важной является задача стабилизации программного движения мобильного робота при учете таких факторов, как проскальзывание колес, наличие неизвестных массо-инерционных параметров. В работе [11] предложен адаптивный закон управления, основанный на методе бэкстеппинга и построении функции Ляпунова, позволяющий стабилизировать движение вдоль программной траектории робота с тремя омни-колесами с уче-

том неизвестных массо-инерционных параметров системы и действия сил трения скольжения. Отметим, что релейный закон управления, предложенный в [11], имеет сложную структуру и требует он-лайн вычислений оценок неизвестных параметров.

В работах [8], [9] рассмотрены модели трехколесных омни-мобильных роботов без учета проскальзывания колес и построены законы управления, решающие задачу стабилизации программного движения, в том числе, при неточно известных параметрах системы.

В докладе представлен новый робастный закон управления для динамической модели робота с тремя омни-колесами и со смещенным центром масс с учетом проскальзывания колес и неточно известных массо-инерционных характеристик системы.

## 2. Формулировка задачи

Рассмотрим динамическую модель робота (рис. 1) с тремя омни-колесами и со смещенным центром масс, движущегося по горизонтальной поверхности под действием моментов, развиваемых тремя электродвигателями постоянного тока.

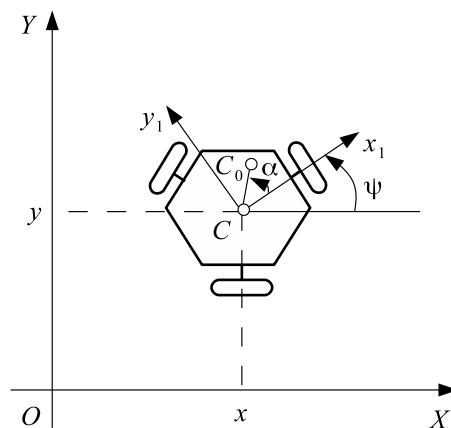


Рис. 1. Мобильный робот с тремя омни-колесами и со смещенным центром масс

Введем следующие обозначения:  $m_0$  — масса платформы,  $m_1$  — масса колеса робота,  $\rho_0$ ,  $\rho_1$  — соответственно радиусы инерции платформы и колеса относительно вертикальной оси, проходящей через их центры масс,  $r$  — радиус колеса,  $r_1$  — радиус инерции колеса относительно оси вращения,  $m_s = m_0 + 3m_1$  — масса робота,  $I_q = m_0(\rho_0^2 + d^2) + 3m_1(\rho_1^2 + a^2)$  — момент инерции робота относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс платформы,  $m_2 = m - m_s = 3m_1\rho_3^2/(2r^2)$ .

Пусть  $OXYZ$  — неподвижная декартова система координат, связанная с горизонтальной опорной плоскостью  $OXY$ , ось  $OZ$  направлена вертикально вверх. Пусть  $C$  — центр равностороннего треугольника  $C_1C_2C_3$  с вершинами, лежащими в центрах масс колес робота.  $Cx_1y_1z_1$  — подвижная система координат с началом в точке  $C$ , жестко связанная с платформой робота. Ось  $Cx_1$  совпадает с осью вращения первого колеса. Расстояние от центра платформы  $C$  до центра масс  $C_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) каждого колеса равно  $a$ .

Пусть  $x$ ,  $y$  — координаты центра  $C$  платформы в системе координат  $OXYZ$ ,  $\psi$  — угол поворота платформы вокруг вертикальной оси  $Cz_1$ . Центр масс робота  $C_0$

смещен относительно центра  $C$  платформы на расстояние  $d$ , угол между осью  $Cx_1$  и прямой  $CC_0$  равен  $\alpha$ .

Обозначим  $q = (q_1, q_2, q_3)^T = (x, y, \psi)^T$ ,  $\dot{q} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{\psi})^T$ ,  $V = (V_{x1}, V_{y1}, \omega)$  — вектор скорости платформы в подвижной системе координат  $Cx_1y_1z_1$ .

Тогда уравнения динамики робота в системе координат  $OXYZ$  примут вид

$$(1) \quad \begin{aligned} A(q_3)\ddot{q} + \tilde{B}(q_3, \dot{q}_3)\dot{q} &= P(q_3)rf_t \\ I_\omega\ddot{\psi} &= M - rf_t \end{aligned}$$

where  $q = (q_1, q_2, q_3)^T$ ,  $q_1 = x$ ,  $q_2 = y$ ,  $q_3 = \psi$ ,

$$\begin{aligned} A(q_3) &= \begin{pmatrix} m & 0 & -s(q_3) \\ 0 & m & c(q_3) \\ -s(q_3) & c(q_3) & I_s \end{pmatrix} \\ \tilde{B}(q_3, \dot{q}_3) &= \begin{pmatrix} 0 & m_2\dot{q}_3 & -c(q_3)\dot{q}_3 \\ -m_2\dot{q}_3 & 0 & -s(q_3)\dot{q}_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P(q_3) &= \begin{pmatrix} \sin q_3 & \sin\left(q_3 + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(q_3 + \frac{4\pi}{3}\right) \\ -\cos q_3 & -\cos\left(q_3 + \frac{2\pi}{3}\right) & -\cos\left(q_3 + \frac{4\pi}{3}\right) \\ -a & -a & -a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$c(q_3) = m_0d \cos(\alpha + q_3)$ ,  $s(q_3) = m_0d \sin(\alpha + q_3)$ ,  $I_w = m_1r_1^2$  — момент инерции колеса относительно его оси вращения,  $f_t = (f_{t1}, f_{t2}, f_{t3})^T$ ,  $f_{ti}$  — тяговое усилие, приложенное в точке контакта  $i$ -го колеса с поверхностью,  $M = (M_1, M_2, M_3)^T$ ,  $M_i$  — вращающий момент, развиваемый  $i$ -ым электродвигателем,

$$\begin{aligned} m &= m_0 + 3m_1 + \frac{3m_1\rho_3^2}{2r^2} \\ I_s &= m_0(d^2 + \rho_0^2) + 3m_1 \left[ \rho_1^2 + a^2 \left( 1 + \frac{2\rho_3^2}{r^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Преобразуем уравнения (1) к виду

$$(2) \quad (A(q_3) + P(q_3)I_\omega(E + S)P^T(q_3))\ddot{q} + (\tilde{B}(q_3, \dot{q}_3) + P(q_3)I_\omega\dot{S}P^T(q_3))\dot{q} = P(q_3)M$$

где  $S = \text{diag}(s_1, s_2, s_3)$  — матрица переменных коэффициентов, характеризующих проскальзывание колес,  $s_i$  изменяется со временем в пределах от -1 до 1,  $i = 1, 2, 3$ .

Согласно [7], предположим, что моменты, развиваемые электродвигателями постоянного тока, являются линейными относительно напряжения, подаваемого на двигатель, и угловой скорости вращения ротора, т.е.

$$(3) \quad M_j = c_u u_j - c_\nu \dot{\varphi}_j, \quad j = 1, 2, 3$$

где  $c_u$  и  $c_\nu$  — положительные постоянные коэффициенты,  $u_j$  — напряжение, подаваемое на  $j$ -ый двигатель,  $c_\nu \dot{\varphi}_j$  — момент противоэлектродвижущей силы.

Тогда уравнения динамики робота примут вид

$$(4) \quad (A(q_3) + P(q_3)I_\omega(E + S)P^T(q_3))\ddot{q} + (B(q_3, \dot{q}_3) + P(q_3)(I_\omega\dot{S} + c_\nu S)P^T(q_3))\dot{q} = P(q_3)U$$

где  $U = (U_1, U_2, U_3)^T$ ,  $U_j = c_u u_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , матрица  $B(q_3, \dot{q}_3)$  имеет вид

$$B(q_3, \dot{q}_3) = \begin{pmatrix} h & m_2 \dot{q}_3 & -c(q_3) \dot{q}_3 \\ -m_2 \dot{q}_3 & h & -s(q_3) \dot{q}_3 \\ 0 & 0 & 2a^2 h \end{pmatrix}$$

$$h = 3c_\nu / (2r^2).$$

Пусть  $q = q^{(0)}(t)$  — программное движение робота, которое является дважды непрерывно дифференцируемой функцией времени. Предположим, что найдутся положительные числа  $\xi_1$ ,  $\eta_k$  и  $\zeta_k$  ( $k = 1, 2$ ), такие, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |q_k^{(0)}(t)| &\leq \xi_1, \quad |\dot{q}_k^{(0)}(t)| \leq \eta_1, \quad |\dot{q}_3^{(0)}(t)| \leq \eta_2 \\ |\ddot{q}_k^{(0)}(t)| &\leq \zeta_1, \quad |\ddot{q}_3^{(0)}(t)| \leq \zeta_2, \quad (k = 1, 2) \end{aligned}$$

Введем отклонения от программного движения

$$(5) \quad e_k = q_k - q_k^{(0)}(t), \quad k = 1, 2, 3$$

Рассмотрим задачу о стабилизации программного движения  $q^{(0)}(t)$  робота при помощи управления

$$(6) \quad U = P^{-1}(q_3)(U^{(0)}(t) + U^{(2)}),$$

где функции  $U^{(0)}(t)$  и  $U^{(2)}$  определяются в виде

$$(7) \quad \begin{aligned} U^{(0)}(t) &= A^{(0)}(q_3)\ddot{q}^{(0)}(t) + B^{(0)}(q_3, \dot{q}_3^{(0)}(t))\dot{q}^{(0)}(t) \\ U_j^{(2)} &= -\gamma_j \arctan(q_j - q_j^{(0)}), \quad j = 1, 2, \quad U_3^{(2)} = -\gamma_3 \sin\left(\frac{q_3 - q_3^{(0)}}{2}\right) \end{aligned}$$

$\gamma_j > 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ , матрицы  $A^{(0)}(q_3)$  и  $B^{(0)}(q_3, \dot{q}_3^{(0)}(t))$  известны точно,  $A(q_3) = A^{(0)}(q_3) + \Delta A(q_3)$ ,  $B(q_3, \dot{q}_3^{(0)}(t)) = B^{(0)}(q_3, \dot{q}_3^{(0)}(t)) + \Delta B(q_3, \dot{q}_3^{(0)}(t))$ .

### 3. Решение задачи

Уравнения в отклонениях (5) примут вид

$$(8) \quad \begin{aligned} &(A(q_3^{(0)}(t) + e_3) + P(q_3^{(0)}(t) + e_3)I_\omega(E + S)P^T(q_3^{(0)}(t) + e_3))\ddot{e}_q + \\ &+ (B(q_3^{(0)}(t) + e_3, \dot{q}_3^{(0)}(t) + \dot{e}_3) + \\ &+ P(q_3^{(0)}(t) + e_3)(I_\omega \dot{S} + c_\nu S)P^T(q_3^{(0)}(t) + e_3))\dot{e}_q + f(t, e_3)\dot{e}_3 = \\ &= -diag(\gamma_1 \arctan e_1, \gamma_2 \arctan e_2, \gamma_3 \sin e_3/2) + \delta(t, e_3). \end{aligned}$$

где  $f = (m_2 \dot{q}_2^{(0)}(t) - c(q_3^{(0)}(t) + e_3)\dot{q}_3^{(0)}(t), -s(q_3^{(0)}(t) + e_3)\dot{q}_3^{(0)}(t) - m_2 \dot{q}_1^{(0)}(t), 0)^T$ ,  $\delta(t, e_3) = P(q_3^{(0)}(t) + e_3)I_\omega(E + S)P^T(q_3^{(0)}(t) + e_3)\ddot{q}^{(0)}(t) + P(q_3^{(0)}(t) + e_3)(I_\omega \dot{S} + c_\nu S)P^T(q_3^{(0)}(t) + e_3)\dot{q}^{(0)}(t) + \Delta A(q_3)\ddot{q}^{(0)}(t) + \Delta B(q_3, \dot{q}_3^{(0)}(t))\dot{q}^{(0)}(t)$ .

**Теорема 1.** *Рассмотрим замкнутую систему в отклонениях (8). Пусть выполнены следующие неравенства*

$$(9) \quad \begin{aligned} |\delta(t, e_3)| &< \delta_0, \quad h > \varepsilon \\ 2(2a^2 h - \varepsilon)(h - \varepsilon) &> (m_0 d \eta_2 + m_2 \eta_1)^2 \\ \max(3/2, 2a^2)(c_\nu + 2I_\omega(\eta_2 + \delta_3)) &/ r^2 < \varepsilon \end{aligned}$$

где  $\varepsilon$  — малое положительное число,  $\delta_3 > 0$  таково, что  $|\dot{e}_3| < \delta_3$ .

Тогда, система (8) предельно ограничена.

## 4. Заключение

В работе получен новый робастный закон управления без измерения скоростей, решающий задачу стабилизации программного движения мобильного робота с омни-колесами и со смещенным центром масс с учетом проскальзывания колес и неточно известных массо-инерционных параметров системы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-01-00702а) и Министерства науки и высшего образования РФ (9.5994.2017/БЧ).

## Список литературы

1. Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С. Тележка с омниколесами на плоскости и сфере // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, № 4. С. 785-801.
2. Зобова А.А., Татаринцов Я.В. Динамика экипажа с роликонесущими колесами // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73, Вып. 1. С. 13-22.
3. Зобова А.А., Герасимов К.В. Движение симметричного экипажа на омни-колесах с массивными роликами // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, Вып. 4. С. 427-440.
4. Караваев Ю.Л., Трефилов С.А. Дискретный алгоритм управления по отклонению мобильным роботом с омниколесами // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 1. С. 91-100.
5. Килин А. А., Караваев Ю. Л., Клековкин А. В. Кинематическая модель управления высокоманевренным мобильным сферороботом с внутренней омниколесной платформой // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 1. С. 113-126.
6. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Известия РАН. Теория и системы управления. 2007. № 6. С. 142-149.
7. Мартыненко Ю.Г. Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74, Вып. 4. С. 610-619.
8. Andreyev A. S., Peregudova O. A. The motion control of a wheeled mobile robot // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2015. Vol. 79, No. 4. P. 316-324.
9. Andreev A.S., Peregudova O.A. Nonlinear controllers in the regulation problem of the robots // IFAC PapersOnLine. 2018. Vol. 51, No. 4. P. 7-12.
10. Borisov A.V., Kilin A.A., Mamaev I.S. Dynamics and control of an omniwheel vehicle // Regular and Chaotic Dynamics. 2015. Vol. 20. P. 153-172.
11. Huang H.C., Tsai C.C. Adaptive Trajectory Tracking and Stabilization for Omnidirectional Mobile Robot with Dynamic Effect and Uncertainties // IFAC Proceedings Volumes. 2008. Vol.41, No. 2. P. 5383-5388.
12. Huang Y., Cao Q., Leng C. The Path-Tracking Controller Based on Dynamic Model with Slip for One Four-Wheeled OMR // Industrial Robot: An International Journal. 2010. Vol. 37, No. 2. P. 193-201.
13. Lins Barreto S. J.C., Scolari Conceicao A.G., Dorea C.E.T., Martinez L., De Pieri E.R. Design and Implementation of Model-Predictive Control With Friction Compensation on an Omnidirectional Mobile Robot // IEEE-ASME TRANSACTIONS ON MECHATRONICS. 2014. No. 2. P. 467-476.
14. Liu Y., Zhu J. J., Williams II R. L., Wu J. Omni-directional mobile robot controller based on trajectory linearization // Robotics and Autonomous Systems. 2008. Vol. 56. P. 461-479.
15. Stonier D., Cho S. H., Choi S. L., Kuppuswamy N. S., Kim J. H. Nonlinear Slip Dynamics for a Omniwheel Mobile Robot Platform // IEEE International Conference on Robotics and Automation. Rome, Italy, April 10-14, 2007. P. 2367-2372.