

УДК 519.876.2

# К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАДИУСА РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОПРИВОДА

**С.Н. Стребуляев**

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,*  
Россия, 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23  
E-mail: [sstrebuliaev@mail.ru](mailto:sstrebuliaev@mail.ru)

**М.С. Петрова**

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,*  
Россия, 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23

**Ключевые слова:** система электропривода, математическая модель, характеристическое уравнение, область устойчивости, система аналитических вычислений, чувствительные параметры, радиус робастной устойчивости

**Аннотация:** Рассмотрена структурная схема системы электропривода (ЭП), включающая в себя систему управления и двигатель. Получена общая передаточная функция изучаемой системы и характеристическое уравнение в символьном виде. Проведен анализ устойчивости изучаемой системы по расположению корней характеристического уравнения на комплексной плоскости. Построены границы областей устойчивости в плоскостях различных параметров. Получены границы областей устойчивости в виде поверхностей в трехмерном пространстве конструктивных параметров и найдены параметры, оказывающие наибольшее влияние на устойчивость системы электропривода. Проведено сведение общей передаточной функции к безразмерному виду. Из анализа границ областей устойчивости получен массив радиусов устойчивости. Получено минимальное значение радиуса – радиус робастной устойчивости в восемнадцатимерном пространстве рассматриваемой динамической системы.

Электропривод является составной частью почти любой современной машины или оборудования. Система электропривода является сложной многоконтурной системой с несколькими цепями обратной связи и большим количеством регулируемых параметров. Значения этих параметров не всегда известны точно или могут варьироваться в процессе эксплуатации. Актуальна задача построения математических моделей и расчета границ областей устойчивости с учетом возможной вариации отдельных параметров. Решение этой задачи в настоящем исследовании проведено с использованием системы аналитических вычислений (САВ)Maple. Использование этой САВ оказалось очень эффективным, так как позволило проводить анализ больших массивов информации в общем виде, не делая каких-либо упрощений.

Рассматривалась структурная схема электропривода [1, 2], используемого на металлорежущих станках с устройством числового программного управления (рис. 1). Эта схема состоит из двух частей собственно электропривода (ЭП) и двигателя (Д).

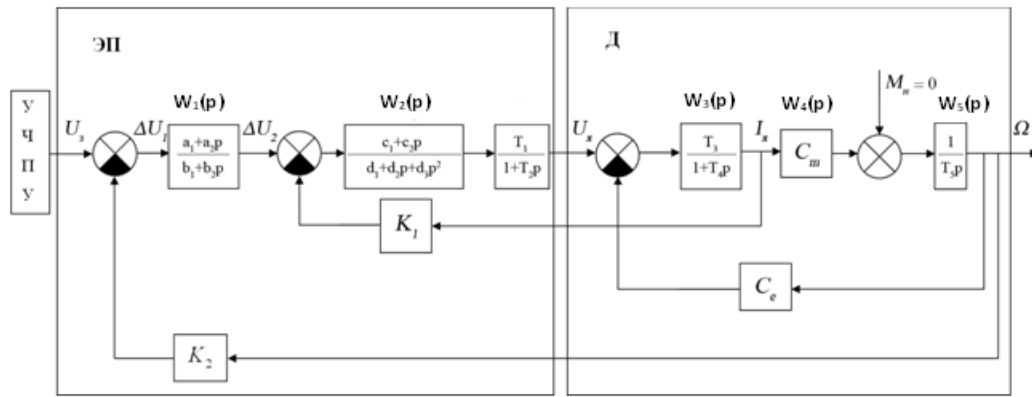


Рис.1. Структурная схема системы электропривода

Характеристическое уравнение системы есть полином шестого порядка вида:

$$(1) \quad Q_6(p) = q_0 p^6 + q_1 p^5 + q_2 p^4 + q_3 p^3 + q_4 p^2 + q_5 p + q_6 = 0,$$

где коэффициенты полинома являются функциями от восемнадцати конструктивных параметров системы  $q_i = q_i(\alpha_1, \dots, \alpha_{18})$  и имеют сложный вид:

$$q_0 := T_2 T_4 T_5 b_2 d_3$$

$$q_1 := T_2 T_4 T_5 b_1 d_3 + T_2 T_4 T_5 b_2 d_2 + T_2 T_5 b_2 d_3 + T_4 T_5 b_2 d_3$$

$$q_2 := C_e C_m T_2 T_3 b_2 d_3 + T_2 T_4 T_5 b_1 d_2 + T_2 T_4 T_5 b_2 d_1 + T_2 T_5 b_1 d_3 + T_2 T_5 b_2 d_2 + T_4 T_5 b_1 d_3 + T_4 T_5 b_2 d_2 + T_5 b_2 d_3$$

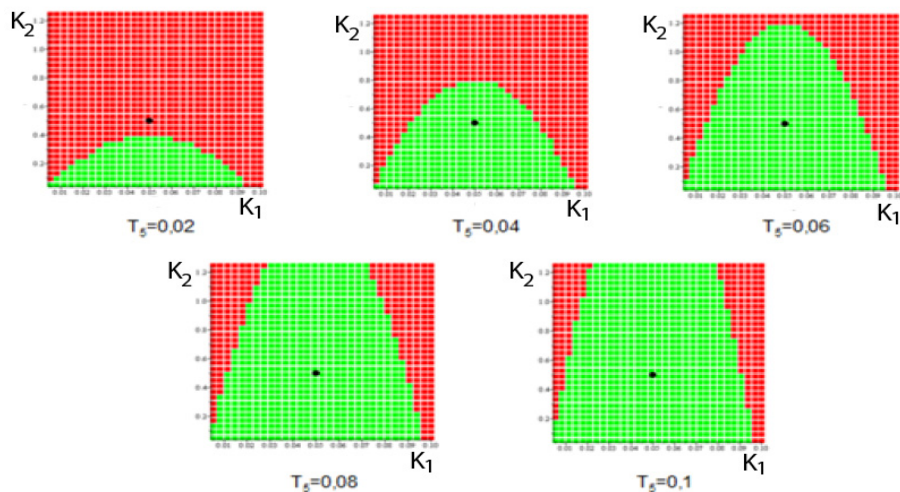
$$q_3 := C_e C_m T_2 T_3 b_1 d_3 + C_e C_m T_2 T_3 b_2 d_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 b_2 c_2 + C_e C_m T_3 b_2 d_3 + T_2 T_4 T_5 b_1 d_1 + T_2 T_5 b_1 d_2 + T_2 T_5 b_2 d_1 + T_4 T_5 b_1 d_2 + T_4 T_5 b_2 d_1 + T_5 b_1 d_3 + T_5 b_2 d_2$$

$$q_4 := C_e C_m T_2 T_3 b_1 d_2 + C_e C_m T_2 T_3 b_2 d_1 + C_m K_2 T_1 T_3 a_2 c_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 b_1 c_2 + K_1 T_1 T_3 T_5 b_2 c_1 + C_e C_m T_3 b_1 d_3 + C_e C_m T_3 b_2 d_2 + T_2 T_5 b_1 d_1 + T_4 T_5 b_1 d_1 + T_5 b_1 d_2 + T_5 b_2 d_1$$

$$q_5 := C_e C_m T_2 T_3 b_1 d_1 + C_m K_2 T_1 T_3 a_1 c_2 + C_m K_2 T_1 T_3 a_2 c_1 + K_1 T_1 T_3 T_5 b_1 c_1 + C_e C_m T_3 b_1 d_2 + C_e C_m T_3 b_2 d_1 + T_5 b_1 d_1$$

$$q_6 := C_m K_2 T_1 T_3 a_1 c_1 + C_e C_m T_3 b_1 d_1$$

Исследование устойчивости в плоскости параметров для случая передаточной функции заданной размерными параметрами проводилось с использованием метода Рунге-Кутты. При проведении вычислительного эксперимента использовался разработанный достаточно универсальный комплекс программ. Это программное обеспечение позволяет определять область устойчивости в плоскости двух любых задаваемых пользователем параметров. При этом также задаются пределы изменения указанных параметров. Расчет показал, например, что при увеличении момента инерции ротора двигателя с приведенной инерционной нагрузкой  $T_5$  область устойчивости в плоскости параметров  $(K_1, K_2)$  увеличивается (рис. 2).

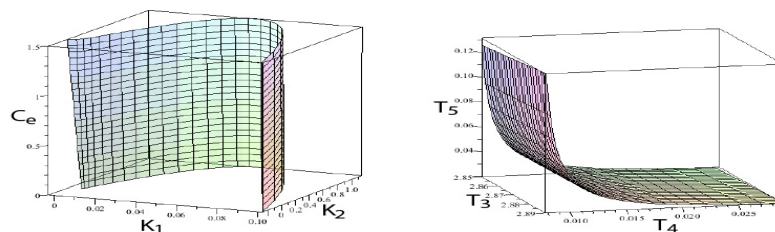


**Рис. 2.** Границы областей устойчивости в плоскости параметров  $(K_1, K_2)$  для разных значений  $T_3$ .

Известно, что коэффициенты усиления в цепях обратной связи играют существенную роль при анализе устойчивости динамических систем. Рассмотрим пространство параметров  $(K_1, K_2, C_e)$ . Каждый из этих параметров изменяется в определенных пределах, обусловленных работой системы ЭП. Подставим номинальные значения остальных параметров, кроме вышеуказанных, и  $p=i\omega$  в характеристическое уравнение (1). Приравняв нулю вещественные и мнимые части характеристического полинома, получим систему уравнений:

$$(2) \quad \begin{cases} \operatorname{Re}(Q_6(i\omega)) = 0, \\ \operatorname{Im}(Q_6(i\omega)) = 0. \end{cases}$$

При решении этой системы получаем, например, зависимости  $K_1 = \varphi(C_e, \omega)$  и  $K_2 = \psi(C_e, \omega)$ . Изменяя  $C_{eH} < C_e < C_{eK}$  и  $0 < \omega < \infty$ , получаем параметрически заданную поверхность, разделяющую пространство  $(K_1, K_2, C_e)$  на две области. В разработанном комплексе программ предусмотрено также определение характера областей по ту или другую стороны от полученной поверхности. Верификация программного обеспечения проводилась по анализу границ областей устойчивости в сечениях полученных трехмерных изображений. В результате компьютерного моделирования были получены, в частности, границы областей устойчивости в виде поверхностей в пространствах параметров исследуемой системы (рис. 3).



**Рис. 3.** Границы областей устойчивости в пространстве параметров  $(K_1, K_2, C_e)$  и  $(T_3, T_4, T_5)$ .

С использованием режима анимации проведен анализ чувствительных, по отношению к изменениям границ областей устойчивости, параметров системы ЭП (рис. 4). Выяснилось, что параметры  $a_1, d_1, d_2$  и  $C_e$  не оказывают влияния на устойчивость системы. Таким образом, при рассмотрении восемнадцатимерного пространства парамет-

ров системы можно перейти к пространству меньшей размерности – четырнадцатимерному.

	$K_1$	$K_2$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$a_2$	$b_2$	$c_1$	$c_2$	$d_3$	$C_m$
↑, %	72	125	53	134	55	-	-	133	-	212	68	78	131
↓, %	72	-	-	-	94	43	57	98	59	-	83	-	-

Рис. 4. Чувствительные параметры системы ЭП.

Имея столь богатый материал о границах областей устойчивости, естественно рассмотреть случай, когда параметры системы не известны точно, причем во многих случаях их значения в принципе не могут быть доступны. При этом сами уравнения, описывающие движение, известны точно. В таких ситуациях можно ставить задачу о нахождении радиусаробастной устойчивости [3].

Приведем коэффициенты уравнения (1) к безразмерному виду:

$$0 < \alpha_i < \alpha_{i,\max} / : \alpha_{i,\max}, \quad 0 < \frac{\alpha_i}{\alpha_{i,\max}} < 1, \quad \alpha_i^* = \frac{\alpha_i}{\alpha_{i,\max}}, \quad 0 < \alpha_i^* < 1, \quad \overline{i = 1, 18}.$$

В этом случае передаточная функция имеет вид:

$$\begin{aligned} W(p) := & 7.2 \cdot 10^{-12} p^6 \alpha_{14} \alpha_4 \alpha_9 \alpha_{11} \alpha_{13} + (1.1 \cdot 10^{-8} \alpha_4 \alpha_8 \alpha_{11} \alpha_{13} \alpha_{14} + 2.3 \cdot 10^{-10} \alpha_4 \alpha_9 \alpha_{11} \alpha_{14} \\ & + 2.2 \cdot 10^{-9} \alpha_4 \alpha_9 \alpha_{13} \alpha_{14}) p^5 + (5.7 \cdot 10^{-8} \alpha_{18} \alpha_{17} \alpha_{12} \alpha_4 \alpha_9 \alpha_{11} + 7.0 \cdot 10^{-8} \alpha_{14} \alpha_4 \alpha_7 \alpha_{11} \alpha_{13} \\ & + 6.8 \cdot 10^{-8} \alpha_{14} \alpha_4 \alpha_9 + 3.5 \cdot 10^{-7} \alpha_{14} \alpha_4 \alpha_8 \alpha_{11} + 0.0000034 \alpha_{14} \alpha_4 \alpha_8 \alpha_{13}) p^4 \\ & + (0.000089 \alpha_{18} \alpha_{17} \alpha_{12} \alpha_4 \alpha_8 \alpha_{11} + 0.015 \alpha_{15} \alpha_{10} \alpha_{12} \alpha_{14} \alpha_6 \alpha_4 + 0.000021 \alpha_{14} \alpha_4 \alpha_7 \alpha_{13} \\ & + 0.0000022 \alpha_{14} \alpha_4 \alpha_8 \alpha_{11} + 0.00011 \alpha_{14} \alpha_4 \alpha_8 + 0.000017 \alpha_{18} \alpha_{17} \alpha_{12} \alpha_4 \alpha_9) p^3 \\ & + (0.027 \alpha_{18} \alpha_{17} \alpha_{12} \alpha_4 \alpha_8 + 1.4 \alpha_{16} \alpha_{17} \alpha_{10} \alpha_{12} \alpha_2 \alpha_6 + 0.00056 \alpha_{18} \alpha_{17} \alpha_{12} \alpha_4 \alpha_7 \alpha_{11} \\ & + 0.91 \alpha_{15} \alpha_{10} \alpha_{12} \alpha_{14} \alpha_5 \alpha_4 + 0.00066 \alpha_{14} \alpha_4 \alpha_7) p^2 + (0.17 \alpha_{18} \alpha_{17} \alpha_{12} \alpha_4 \alpha_7 \\ & + 120 \cdot \alpha_{16} \alpha_{17} \alpha_{10} \alpha_{12} \alpha_1 \alpha_6 + 85 \cdot \alpha_{16} \alpha_{17} \alpha_{10} \alpha_{12} \alpha_2 \alpha_5) p + 7100 \cdot \alpha_{16} \alpha_{17} \alpha_{10} \alpha_{12} \alpha_1 \alpha_5 \end{aligned}$$

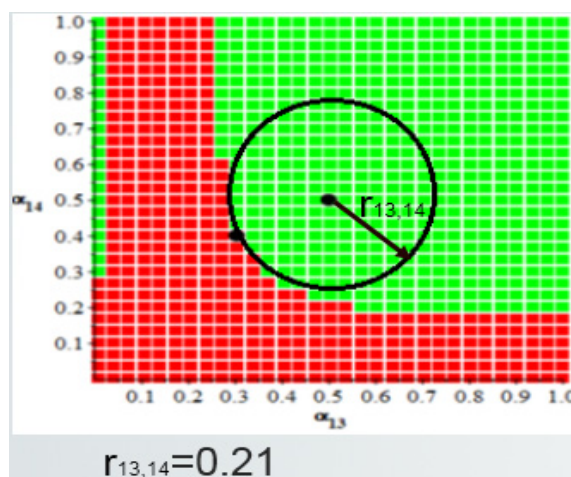


Рис. 5. Схема определения радиуса устойчивости.

Найдем радиус  $r_{i,j}$  устойчивости [3] в каждой из плоскостей  $(\alpha_i, \alpha_j)$  пространства чувствительных параметров системы электропривода (рис. 5). Радиус робастной устой-

чивости  $R$  определяем следующим образом:  $R = \min(r_{1,2}, r_{1,3}, \dots, r_{1,18}, r_{2,3}, r_{2,4}, \dots, r_{17,18})$ . Таким образом  $n$ -мерном пространстве параметров исследуемой системы имеем сферу радиуса  $R$  с центром в точке  $M_0(\alpha_1^{*0}, \alpha_2^{*0}, \dots, \alpha_{18}^{*0})$ . Для любой точки  $M(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_{18}^*)$  лежащей внутри сферы, то есть  $\rho(M_0, M) < R$  гарантируется устойчивость состояния равновесия исследуемой системы.

Полученные результаты и программное обеспечение могут быть использованы при проектировании и разработке новых конструкций приводов. Предложенный подход с использованием программных средств – системы аналитических вычислений Maple может быть эффективно использован для анализа устойчивости более сложных систем автоматического регулирования. При этом, вероятно, появится необходимость использования значительных ресурсов вычислительной техники и компьютерных станций.

## Список литературы

1. Стребуляев С.Н. Исследование устойчивости системы электропривода // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2014. № 4. Часть 1. С. 343-349.
2. Стребуляев С.Н., Петрова М.С. Использование компьютерных технологий для исследования робастной устойчивости электромеханических систем // Устойчивость и колебания нелинейных систем управления: Материалы XIV Международной научной конференции. 30 мая - 1 июня 2018 г., Москва) / Ред. В.Н. Тхай. М.: ИПУ РАН, 2018.
3. Неймарк Ю.И. Мера робастной устойчивости и модальности линейных систем // Доклады Академии наук. Кибернетика и теория регулирования. 1992. Т. 325, № 2. С. 247-249.