УДК 517.977

ОБ АДАПТАЦИИ АЛГОРИТМА ГАРАНТИРОВАННОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Д.В. Хаданович
Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)
Россия, 454080, Челябинск, Ленина пр., 76
E-mail: dinakhadanovich@mail.ru

В.И. Ширяев
Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)
Россия, 454080, Челябинск, Ленина пр., 76
E-mail: shiriaevvi@susu.ru

Ключевые слова: гарантированное оценивание, адаптивная фильтрация, короткий интервал наблюдений,

Аннотация: Рассматривается задача адаптивного гарантированного оценивания состояния линейных динамических систем в условиях неполноты информации, когда статистические характеристики возмущений и ошибок измерений отсутствуют и известны только множества их возможных значений. Задача связана с особенностью методов гарантированного оценивания, проявляющейся в том, что на коротком интервале наблюдений допустимые множества значений возмущений и ошибок измерений могут оказаться лишь грубыми оценками сверху. Представлен подход к построению адаптивного алгоритма гарантированного оценивания, при котором происходит уточнение множественных оценок ошибок измерений.

1. Введение

Традиционный подход к построению систем управления динамическими объектами заключается в последовательном решении двух задач – задачи оценивания и задачи синтеза управления, при этом точность решения задачи оценивания существенно зависит от адекватности математической модели динамики объекта и реальных измерительных процессов. В зависимости от предположений о характере возмущений, действующих на объект, и ошибок измерений в информационно-измерительном канале задача оценивания решается либо в стохастической постановке [1-3], либо в гарантированной [4-6].

При гарантированном или минимаксном подходе [5, 7, 9-12] к решению задачи оценивания статистические характеристики, как правило, считаются неизвестными и задаются лишь множественные оценки возможных значений возмущений, ошибок измерений и начального состояния. При этом решение задачи выбирается из условия оптимизации гарантированных множественных оценок, соответствующих наихудшей реализации значений возмущений и ошибок измерений.

Пусть модель линейной динамической системы задана в виде разностных уравнений:

(1) $$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + \Gamma_k w_k,$$

(2) $$y_{k+1} = G_{k+1} x_{k+1} + v_{k+1}, \qquad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

где $x_k \in R^n$ – вектор состояния системы, $u_k \in R^m$ – вектор управления, $y_k \in R^l$ – вектор измерений. Матрицы A_k, B_k, Γ_k, G_k известны. Векторы начального состояния $x_0 \in R^n$, возмущений $w_k \in R^p$ и ошибок измерений $v_k \in R^l$ неизвестны. Информация о них ограничивается заданием включений

(3) $$x_0 \in X_0, w_k \in W, k = 0, 1, \ldots, N-1, v_k \in V, k = 1, 2, \ldots, N.$$

Задача гарантированного оценивания состояния системы (1)–(3) состоит в построении последовательности информационных множеств $x_k \in \bar{X}_k$, $k = 1, 2, \ldots, N$, по рекуррентным соотношениям

(4) $$X_{k+1/k} = A_k \bar{X}_k + \Gamma_k W + B_k u_k, \qquad \bar{X}_0 \in X_0, \qquad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

(5) $$X[y_{k+1}] = \{x \in R^n | G_{k+1} x = y_{k+1} - v, v \in V\},$$

(6) $$\bar{X}_{k+1} = X_{k+1/k} \cap X[y_{k+1}].$$

Здесь $X_{k+1/k}$ – множество прогнозов вектора состояния системы (область достижимости управляемой динамической системы), $X[y_{k+1}]$ – множество состояний совместимых с измерением y_{k+1}.

Операции (4)-(6) выполняются над множествами: линейное преобразование множеств, сумма Минковского, пересечение множеств. Размеры информационных множеств $\bar{X}_k$ во многом определяются размерами априорно заданных множеств (3). Метод гарантированного оценивания обеспечивает верхнюю границу значения показателя качества по всем возмущениям и ошибкам измерений из заданных множеств, а также минимизирует это значение [4, 6, 8]

(7) $$\delta_k^* = \max_{x \in \bar{X}_k} \|x - x_k^*\| = \min_{c \in R^n} \max_{x \in \bar{X}_k} \|x - c\|,$$

x_k^* – чебышевский центр множества $\bar{X}_k$, δ_k^* – чебышевский радиус множества $\bar{X}_k$.

Величина оценки (7) может быть сильно завышена, если допустимые множества возмущений W и ошибок измерений V являются лишь грубыми оценками сверху. В частности, на коротком интервале измерений $y_N(\cdot) = \{y_1, \ldots, y_N\}$, возмущения и ошибки измерений могут реализоваться лишь из подмножеств $w_k \in \widehat{W}_k \subset W$ и $v_k \in \widehat{V}_k \subset V$ соответственно. В связи с этим возникает задача оценивания неизвестных возмущений w_k и ошибок измерений v_k [13]. Уточнение множественных оценок w_k и v_k с использованием их неявной модели позволит существенно повысить точность решения задачи гарантированного оценивания.

Цель данной работы – построение адаптивного алгоритма гарантированного оценивания. Идея адаптации заключается в уточнении множественных оценок ошибок измерений $v_k \in \widehat{V}_k \subset V$. Основной особенностью задачи, исследуемой в работе, является короткий интервал измерений, по результатам которых осуществляется поиск наилучшей оценки вектора состояния.

2. Алгоритм адаптивного гарантированного оценивания

Основная трудность реализации гарантированного алгоритма оценивания на ЭВМ заключается в выполнении операций над множествами в реальном времени, в частности операции суммы Минковского [12]. Упрощение вычислительной процедуры оценивая возможно за счет выделения границ подынтервалов измерений, внутри которых можно пренебречь изменениями вектора состояния x_k. Будем рассматривать задачу оценивания постоянного сигнала, наблюдаемого на фоне помех

(8) $$x_{k+1} = x_k, y_{k+1} = x_{k+1} + v_{k+1}, k = 0, \ldots, N-1,$$

где v_k – ошибка скалярного измерения (или, что не меняет сути, какой-либо одной компоненты векторного измерения).

В предположении, что $\{v_k\}$ – последовательность случайных величин с нулевым средним и среднеквадратическим отклонением σ_v, априорное множество допустимых значений ошибок измерений $v_k \in V$ в уравнениях алгоритма гарантированного оценивания будет задаваться по правилу «трех сигм» (по совокупности всех реализаций $\{v_k\}$)

(9) $$V = \{v \in R^1 | -3\sigma_v \le v \le 3\sigma_v\}.$$

По существу множество (9) представляет собой доверительное множество для случайных (но неопределенно коррелированных между собой) ошибок измерений v_k. На практике, при единственной реализации измерений, множество, сформированное по правилу «трех сигм» может оказаться грубой оценкой сверху.

Применительно к модели (8), (9) уравнения минимаксного фильтра примут вид

(10) $$X_{k+1/k} = \bar{X}_k, \quad \bar{X}_0 \in X_0, k = 0, 1, \dots, N-1,$$

(11) $$X[y_{k+1}] = \{x \in R^1 | x = y_{k+1} - v, v \in V\},$$

(12) $$\bar{X}_{k+1} = X_{k+1/k} \cap X[y_{k+1}].$$

Пусть выборка измерений $\{y_k\}$ $(k = 1, \dots, N)$ имеет длину $N = 7$. По результатам обработки измерений вычисляем апостериорные интервальные оценки ошибок измерений v_k

(13) $$\hat{V}_k = [y_k - \bar{x}_k;\ y_k - \underline{x}_k] = [\underline{v}_k;\ \bar{v}_k], \quad x_k \in \bar{X}_k = [\underline{x}_k;\ \bar{x}_k], \quad k = \overline{1,7}.$$

В качестве точечных оценок v_k^*ошибок измерений v_k примем средние значения интервалов (13).

Таким образом, вычисляя апостериорные интервальные оценки (13) ошибок измерений v_k, можно указать величину ограничения на максимальное значение реализовавшейся ошибки на этом интервале наблюдений.

Относительно ошибок измерений $\{v_k\}$ $(k = 1, \dots, N)$ известно также, что $M[v_k] = 0$. Поэтому выражение для апостериорных интервальных оценок (13) перепишем в виде

(14) $$\hat{V}_k = [\underline{v}_k - v_k^*;\ \bar{v}_k - v_k^*], \qquad k = \overline{1,7}.$$

В качестве интервальной оценки ошибок измерений v_k в моменты времени $k = 8, 9, \dots$, примем интервал $\hat{V} = [v_{\min};\ v_{\max}]$, границы которого определяются как:

(15) $v_{\min}$ – среднее значение последовательности $\{\underline{v}_k - v_k^*\}$ $(k = \overline{1,7})$,

(16) $v_{\max}$ – среднее значение последовательности $\{\bar{v}_k - v_k^*\}$ $(k = \overline{1,7})$.

Контроль выполнения условия $v_k \in \hat{V}$, $k = 8, 9, \dots$,, осуществляется с помощью проверки выполнения следующего условия

(17) $$y_k - x_{k-1}^* \in \hat{V}, k = 8, 9, \dots,,$$

где $y_{k+1} - x_k^*$ представляет собой невязку между текущим измерением и минимаксной оценкой (7) состояния x_k на предыдущем шаге. Если условие (17) не выполняется, то в качестве интервальной оценки ошибки измерения принимается априорно заданная (9).

3. Пример реализации алгоритма

Эффективность предлагаемого алгоритма рассмотрим на примере процесса первого порядка

$$x_{k+1} = x_k, y_{k+1} = x_{k+1} + v_{k+1}, k = \overline{1,25}.$$

Пусть ошибки измерений v_k являются реализацией белого гауссовского шума с нулевым средним и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 1$ (генератор случайных чисел RANDN в MATLAB) (рис. 1).

Исходные данные для алгоритма гарантированного оценивания:

$X_0 = [-6;\ 6], V = [-3;\ 3], x = 4.$

По результат обработки первых семи измерений получена апостериорная интервальная оценка ошибок измерений $\hat{V} = [-1{,}8416;\ 1{,}8416]$ (15), (16) (рис. 1).

На рис. 2 приведены информационные множества $\overline{X}_k$ для переменной состояния x, полученные по реализации алгоритма оценивая, в уравнениях которого априорная информация об ошибках измерений задана в виде множества V, и информационные множества $\overline{X}_k$, полученные по реализации адаптивного алгоритма гарантированного оценивания, с уточнением множественных оценок ошибок измерений. Как видно из рис. 2, с помощью представленного выше подхода к построению адаптивного алгоритма гарантированного оценивания удалось повысить точность решения задачи фильтрации.

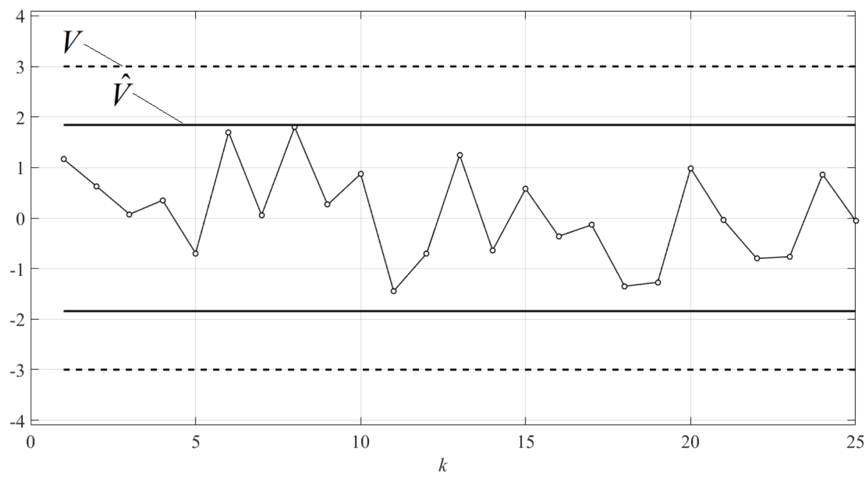

Рис. 1. Реализация ошибок измерений (пунктиром обозначены априорные множественные оценки V).

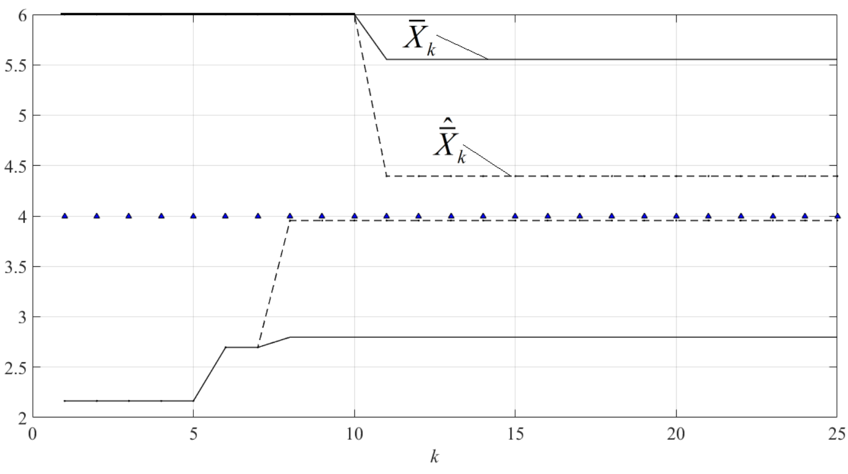

Рис. 2. Информационные множества $\overline{X}_k$ и $\overline{X}_k$ (треугольником обозначены истинные значения переменной состояния x).

4. Заключение

Предложен подход к построению адаптивного алгоритма гарантированного оценивания на коротком интервале наблюдений. Предложенный подход позволяет повысить точность решения задачи оценивания и обеспечивает простой, с точки зрения требуемых вычислительных ресурсов, способ расчета минимаксной оценки вектора состояния.

Список литературы

1. Kalman R.E. Identification of noisy systems // Russian Math. Surveys. 1985. Vol. 40, No.4. P. 25-42.
2. Степанов О.А., Курдюков А.П. Современные методы теории фильтрации // Автоматика и телемеханика. 2016. № 1. С. 3-4.
3. Степанов О.А., Курдюков А.П. Современные методы теории фильтрации. II // Автоматика и телемеханика. 2016. № 2. С. 3-4.
4. Кац И.Я., Куржанский А.Б. Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях // Автоматика и телемеханика. 1978. № 11. С. 79-87.
5. Кунцевич В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации. Киев: Наукова думка, 2006. 264 с.
6. Ширяев В.И. Синтез управления линейными системами при неполной информации // Изв. РАН. Техническая кибернетика. 1994. № 3. С. 229-237.
7. Ширяев В.И. Алгоритмы управления динамическими системами в условиях неопределенности // Мехатроника. 2001. № 8. С. 2-5.
8. Фомин В.Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука, 1984. 288 с.
9. Куржанский А.Б. Задача идентификации – теория гарантированных оценок // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 3-26.
10. Chernousko F.L. Minimax control for class of linear systems subject to disturbances // Journal of Optimization Theory and Application. 2005. Vol. 127. No 3. P. 535-548.
11. Schweppe F.C. Recursive state estimation: unknown but bounded errors and system input // IEEE Trans. Automat. Control. 1968. Vol. 13, No 1. P. 22-28.
12. Куркин О., Шаталов С., Коробочкин Ю. Минимаксная обработка информации. М.: Энергоатомиздат, 1990. 216 с.
13. Осипов Ю.С., Кряжимский А.В., Максимов В.И. Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 129-161.