УДК 531.3

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ МНОГОЗВЕННЫХ СИСТЕМ ТВЕРДЫХ ТЕЛ*

А.В. Борисов
Филиал ФГБОУ ВО НИУ «МЭИ» в г. Смоленске
Россия, 214013, Смоленск, Энергетический проезд, дом 1
E-mail: BorisowAndrej@yandex.ru

И.Е. Каспирович
ФГБОУ ВО НИУ Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, Миклухо-Маклая, 6
E-mail: kaspirovich.ivan@mail.ru

Р.Г. Мухарлямов
ФГБОУ ВО НИУ Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, Миклухо-Маклая, 6
E-mail: robgar@mail.ru

Ключевые слова: система, твердое тело, связь, шарнир, звено, модель, лыжник, сноубордист, рекуррентный алгоритм, матричный метод.

Аннотация: Работа посвящена разработке методов построения уравнений динамики многозвенных систем твердых тел с учетом неголономных связей. В частности, исследуется динамика лыжника-сноубордиста, представленного системой твердых тел с конечным числом звеньев. Получена система дифференциальных уравнений движения в обобщенной векторно-матричной форме. Предлагаемые методы составления уравнений динамики допускают построение рекуррентных алгоритмов определения параметров уравнений динамики.

1. Введение

Проблема исследования динамики многозвенных механизмов, на звенья которых наложены неголономные связи, охватывает различные задачи управления робототехническими системами и транспортными средствами. Вопросам управления движением многомерных механических системам посвящены работы Черноусько Ф.Л., Болотника Н.Н., Ананьевского И.М. и Решмина С.А. [1, 2], Мухарлямова Р.Г. [3-5], Каспировича И.Е. [5], Борисова А.В. и Розенблата Г.М. [6]. Результаты исследований неголономных систем различного назначения изложены в работах Неймарк Ю. И., Фуфаева Н.А. и Бутенина Н. В. [7,8], Карапетяна А. В., Морозова В. М. и их коллег [9], Борисова А. В. и Мамаева И. С. [10] и других авторов. К проблеме исследования динамики многозвен-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-08-00261 А)

ной системы с неголономными связями относится задача моделирования движения слаломиста.

В исследованиях динамики систем твердых тел представляется предпочтительным использование уравнений Лагранжа с неопределенными множителями. При численном решении системы дифференциальных уравнений движения с множителями Лагранжа возникает проблема устойчивости множества траекторий, соответствующих уравнениям связей, для решения которой Baumgarte J. [11] предложил использовать связи, накладываемые на ускорения. Общий метод ограничения отклонений численного решения уравнений динамики от уравнений связей сводится к построению систем дифференциальных уравнений с заданными свойствами решений [12-15].

2. Моделирование сноубордиста двузвенным механизмом

Рассмотрим модель сноубордиста в виде стержневой механической системы с одной лыжей и одним звеном *AB*, которое условно будем называть нога (рис. 1).

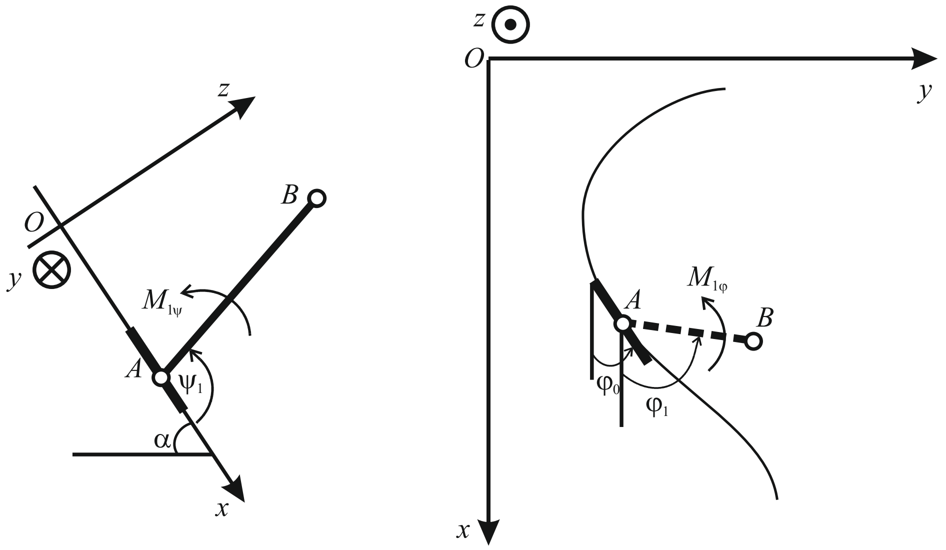

Рис. 1. Модель сноубордиста в виде одного подвижного звена на лыже.

Положения центров масс звеньев определяются двумя углами: углом φ_i ($i = 1$), отсчитываемыми от оси *OX* против часовой стрелки до проекции звена l_i на плоскость *XOY,* и углом ψ_i ($i = 1$) от проекции l_i до звена, отсчитываемым против часовой стрелки. Координаты крепления ноги к лыже обозначим x_A, y_A. Угол φ_0 определяет направление лыжи относительно оси *OX*.

Таким образом, упрощенная модель динамики сноубордиста соответствует системе двух твердых тел с шарнирным соединением. Положение системы определяется пятью координатами в пространственной системе отсчета. Координаты центра масс ноги определяются выражениями:

$$x_{C1} = x_A + l_1 n_1 C_1^{\psi} C_1^{\varphi},\ y_{C1} = y_A + l_1 n_1 C_1^{\psi} S_1^{\varphi},\ z_{C1} = l_1 n_1 S_1^{\psi},$$

где n_i – коэффициент, который зависит от распределения масс звена. При однородном и изотропном материале звеньев $n_1 = ½$. $C_1^{\varphi} = \cos\varphi_1$, $C_1^{\psi} = \cos\psi_1$, $S_1^{\varphi} = \sin\varphi_1$, $S_1^{\psi} = \sin\psi_1$.

На механизм в плоскости движения действует составляющая ускорения свободного падения $g_1 = g\sin\alpha$, направленная вдоль оси *OX*. Будем считать, что звено, соответствующее ноге представляет тонкий стержень, положение которого определяется двумя углами. Следовательно, в качестве модели связи для такого стержня может быть выбран не сферический шарнир, а комбинация двух цилиндрических шарниров, расположенных в точке A. В каждом из цилиндрических шарниров действуют по одному управляющему моменту. $M_{1\psi}$ обеспечивает поддержание позы ноги в вертикальной плоскости, $M_{1\varphi}$ – повороты ноги относительно лыжи в плоскости движения XOY. Задача состоит в определении выражений управляющих моментов, обеспечивающих устойчивое движение сноубордиста по заранее заданной траектории.

Кинетическая энергия системы определяется в соответствии с теоремой Кенига:

$$T=\frac{1}{2}\Big[I_0\dot\varphi_0^2+I_1\big(\dot\varphi_1^2(C_1^\psi)^2+\dot\psi_1^2\big)+m_0\big(\dot x^2+\dot y^2\big)+m_1\Big\{l_1^2n_1^2(C_1^\psi)^2\dot\psi_1^2+$$
$$+\big(\dot x-l_1n_1(C_1^\psi S_1^\varphi\dot\varphi_1+C_1^\varphi S_1^\psi\dot\psi_1)\big)^2+\big(\dot y+l_1n_1(C_1^\varphi C_1^\psi\dot\varphi_1-S_1^\varphi S_1^\psi\dot\psi_1)\big)^2\Big\}\Big].$$

Проекции реакции опоры на оси координат обозначим R_x, R_y, R_z (на рисунке не показаны, их направление совпадает с соответствующими осями координат). Активными внешними силами являются силы тяжести и силы трения. Записывая выражение для элементарной работы действующих сил, определяем обобщенные силы:

$$Q_1=m_0g_1+m_1g_1+R_x,\ Q_2=R_y,\ Q_3=0,$$
$$Q_4=M_{1\varphi}+R_xl_1\sin\varphi_1+R_yl_1\cos\varphi_1,\ Q_5=M_{1\psi}+R_xl_1\sin\psi_1+R_zl_1\cos\psi_1.$$

Связь по поверхности контакта лыжи и снега является неголономной. Уравнение связи имеет вид:

(1) $$\dot x\,\mathrm{tg}\varphi_0-\dot y=0.$$

Траектория сноубордиста (рис. 1) описывается синусоидой

$$y=A\sin(kx),\ \dot y=Ak\dot x\cos(kx),$$

где A – амплитуда траектории.

Тогда уравнение связи (1) принимает вид:

$$\mathrm{tg}\varphi_0-Ak\cos(kx)=0$$

и накладывает ограничение на вариации координат:

$$\mathrm{tg}\varphi_0\cdot\delta x-\delta y=0.$$

Для описания движения неголономной системы используем уравнения Рауса с множителями Лагранжа. В данном случае, на систему наложена одна голономная связь (1). Проделывая все этапы составления уравнений Рауса, получим уравнения движения:

(2) $$(m_0+m_1)\mathrm{sc}^2\varphi_0\ddot x+l_1m_1n_1(C_1^\varphi\mathrm{tg}\varphi_0-S_1^\varphi)C_1^\psi\ddot\varphi_1-l_1m_1n_1(S_1^\varphi\mathrm{tg}\varphi_0+C_1^\varphi)S_1^\psi\ddot\psi_1-$$
$$-l_1m_1n_1(S_1^\varphi\mathrm{tg}\varphi_0+C_1^\varphi)C_1^\psi\dot\varphi_1^2-l_1m_1n_1(S_1^\varphi\mathrm{tg}\varphi_0+C_1^\varphi)C_1^\psi\dot\psi_1^2-2l_1m_1n_1(C_1^\varphi\mathrm{tg}\varphi_0-$$
$$-S_1^\varphi)S_1^\psi\dot\varphi_1\dot\psi_1+(m_0+m_1)\mathrm{sc}^2\varphi_0\mathrm{tg}\varphi_0\dot x\dot\varphi_0=m_0g_1+m_1g_1+R_x+R_y\mathrm{tg}\varphi_0,$$

(3) $$\ddot\varphi_0=0,$$

(4) $$l_1m_1n_1(C_1^\varphi\mathrm{tg}\varphi_0-S_1^\varphi)C_1^\psi\ddot x+(I_1+l_1^2m_1n_1^2)(C_1^\psi)^2\ddot\varphi_1-2(I_1+$$
$$+l_1^2m_1n_1^2)S_1^\psi C_1^\psi\dot\varphi_1\dot\psi_1+l_1m_1n_1C_1^\psi C_1^\varphi\mathrm{sc}^2\varphi_0\dot x\dot\varphi_0=$$
$$=M_{1\varphi}+R_xl_1\sin\varphi_1+R_yl_1\cos\varphi_1,$$

(5) $$-l_1m_1n_1(S_1^\varphi\mathrm{tg}\varphi_0+C_1^\varphi)S_1^\psi\ddot x+(I_1+l_1^2m_1n_1^2)\ddot\psi_1+(I_1+l_1^2m_1n_1^2)S_1^\psi C_1^\psi\dot\varphi_1^2-$$
$$-l_1m_1n_1S_1^\varphi S_1^\psi\mathrm{sc}^2\varphi_0\dot x\dot\varphi_0=M_{1\psi}+R_xl_1\sin\psi_1+R_zl_1\cos\psi_1.$$

3. Система с произвольным числом звеньев

Пусть механизм имеет n звеньев (рис. 2).

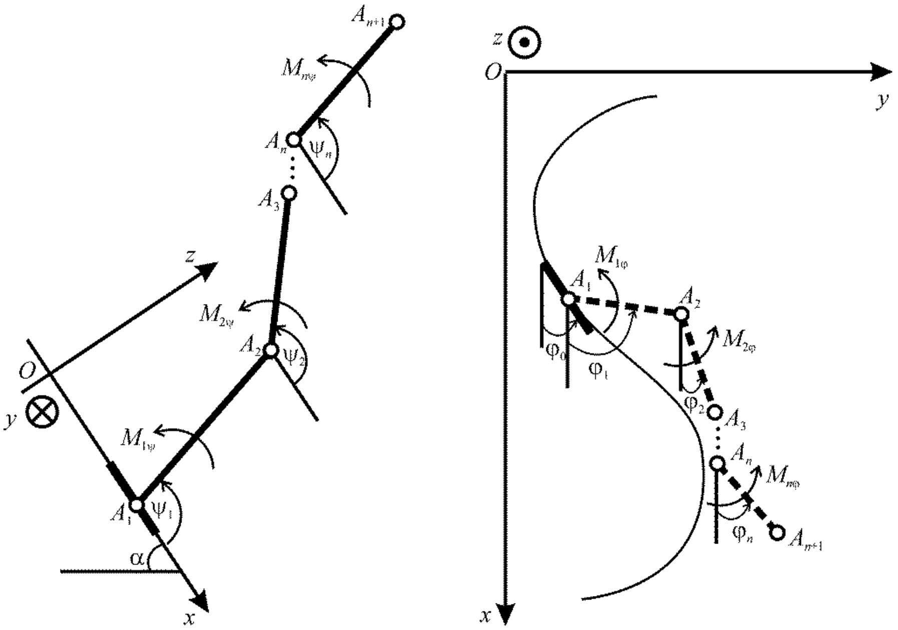

Рис. 2. Модель сноубордиста в виде n подвижных звеньев на лыже.

Проводя аналогичные рассуждения для механизма с двумя и тремя звеньями, получаем матричную форму записи уравнений динамики. Нижние индексы у матриц указывают на описание соответствующей обобщенной координаты: к = 1, 2, 3, где 1 соответствует обобщенной координате φ, 2 – ψ, 3 – x.

$$(6)\qquad A_{к}(\varphi,\psi,l)\ddot{\varphi} + B_{к}(\varphi,\psi,l)\ddot{\psi} + C_{к}(\varphi,\psi,l)\ddot{x} + D_{к}(\varphi,\psi,l)\dot{\Phi}\dot{\varphi} + E_{к}(\varphi,\psi,l)\dot{\Psi}\dot{\psi} + 2G_{к}(\varphi,\psi,l)\dot{\Phi}\dot{\psi} + H_{к}(\varphi,\psi,l)\dot{x}\dot{\Phi} + gP_{к}(\psi) = M_{к}(\varphi,\psi,l),$$

где: φ, ψ – угловые обобщенные координаты $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)^T$ и $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)^T$ – векторы углов; $l = (l_1, \ldots, l_n)^T$ – вектор длин звеньев; $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ – векторы угловых скоростей; $\ddot{\varphi}$, $\ddot{\psi}$ – векторы угловых ускорений; $\dot{\Phi} = \mathrm{diag}(\dot{\varphi}_1,\ldots,\dot{\varphi}_n)$, $\dot{\Psi} = \mathrm{diag}(\dot{\psi}_1,\ldots,\dot{\psi}_n)$ – диагональные матрицы; $M_{к}$ – векторы обобщенных сил; $A_{к}(\varphi,\psi,l)$, $B_{к}(\varphi,\psi,l)$, $D_{к}(\varphi,\psi,l)$, $E_{к}(\varphi,\psi,l)$, $G_{к}(\varphi,\psi,l)$ – матрицы, учитывающие инерционные свойства; $C_{к}(\varphi,\psi,l)$, $H_{к}(\varphi,\psi,l)$ – матрицы, учитывающие движение механизма на плоскости; $P_{к}(\psi)$ – матрицы, определяемые моментами сил тяжести.

Получены выражения элементов матриц, содержащихся в системе дифференциальных уравнений движения n-звенной механической системы. Приведем в качестве примера выражение для матрицы A_{φ}, которая является симметрической. Поэтому достаточно привести для нее только диагональные и наддиагональные элементы, т.е., если i – номер строки, j – номер столбца, то $i, j = 1,2, \ldots, n$, при этом $j \geq i$. Элементы для симметрической матрицы A_{φ} при $j \geq i$ имеют вид:

$$(7)\qquad a_{ij}^{\varphi} = (\delta_{ij}I_i + (\delta_{ij}m_j n_j^2 + \sum_{k=j+1}^{n} m_k\,)l_i l_j)\cos(\varphi_i - \varphi_j)\cos\psi_i\cos\psi_j,$$

где: δ_{ij} – символ Кронекера: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$

Полученные обобщения для матриц (7) затем достаточно подставить в разработанные матричный метод и рекуррентный алгоритм составления систем дифференциальных уравнений движения описанных в работе [6].

4. Заключение

Предложены модели антропоморфных конструкций пространственных механизмов с неголономной связью. Проведено исследование систем дифференциальных уравнений движения для систем с одним, двумя, и более звеньями. Построена система дифференциальных уравнений движения в векторно-матричной форме записи. Результаты моделирования используются для решения задач управления антропоморфными системами с произвольным числом звеньев.

Список литературы

1. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н. Локомоция многозвенных систем на плоскости: динамика, управление, оптимизация. М.: Издательство ИПМех РАН (Препринт № 1128), 2016. 154 с.
2. Черноусько Ф. Л., Ананьевский И. М., Решмин С. А. Методы управления нелинейными механическими системами. М.: Физматлит, 2006. 328 с.
3. Мухарлямов Р. Г. Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2015. № 1. С. 15-28.
4. Мухарлямов Р. Г. Управление динамикой систем с позиционными связями // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды XI Международной Четаевской конференции. Т. 3. Секция 3. Управление. Ч. II. Казань, 13-17 июня 2017 г. Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. С. 140-146.
5. Каспирович И. Е., Мухарлямов Р. Г. Применение метода стабилизации связей к задачам неголономной механики. // LII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники: тезисы докладов. Москва, РУДН, 17-19 мая 2016 г. М.: РУДН, 2016. С. 112-116.
6. Борисов А. В., Розенблат Г. М. Моделирование динамики экзоскелета с управляемыми моментами в суставах и переменной длиной звеньев с использованием рекуррентного метода составления дифференциальных уравнений движения // Известия РАН. Теория и системы управления. 2018. № 2. С. 148-174.
7. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М. Наука. 1967. 519 с.
8. Бутенин Н. В., Фуфаев Н. А. Введение в аналитическую динамику / 2-е изд., пер. и доп. М.: Наука, 1991. 250 с.
9. Неголономные механические системы и стабилизация движения. / В. И. Калёнова, А. В. Карапетян, В. М. Морозов, М. А. Салмина // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 7. С. 117-158.
10. Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А. Избранные задачи неголономной механики. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. 289 с.
11. Baumgarte J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // Comp. Math. Appl. Mech. Eng. 1972. No. 1. P. 1-16.
12. Erugin N. P. Construction of the entire set of systems of differential equations that have a given integral curve // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1952. Vol. 21. P. 659-670.
13. Mukharlyamov R. G. On the construction of differential equations of optimal motion on the given manifold // Differ. Equat. 1971. Vol. 7. P. 1825-1834.
14. Mukharlyamov R.G. On the construction of the set of differential equations of stable motion given an integral manifold // Differ. Equat. 1969. Vol. 5. P. 688-699.
15. Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. М. Наука, 1986. 224 с.