

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

В.А. Бойченко

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: victor@ipu.ru

Ключевые слова: линейные стохастические системы, \mathcal{H}_∞ норма, σ -энтропийная норма.

Аннотация: В работе рассматривается спектральный метод анализа стохастических систем на основе интегральной характеристики входного сигнала – σ -энтропии. В качестве критерия качества используется σ -энтропийная норма системы, которая определяется как индуцированная норма на множестве входных сигналов, σ -энтропия которых не превышает заданного значения s .

1. Линейная дискретная система

Рассмотрим объект, который описывается линейной дискретной стационарной системой с нулевыми начальными условиями:

$$(1) \quad \begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bw_k, & x_0 = 0, \\ z_k = Cx_k + Dw_k, & k = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта, $z_k \in \mathbb{R}^p$ – целевой выход, $w_k \in \mathbb{R}^m$ – внешнее случайное возмущение. Предполагается, что матрица A является асимптотически устойчивой, система управляема и наблюдаема, а входная последовательность $W = \{w_k\}_{0 \leq k < +\infty}$ удовлетворяют следующим условиям:

$$(2) \quad \mathbf{E}[w_k] = 0, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}[|w_k|^2] < \infty.$$

Определим среднеквадратичный коэффициент усиления Θ для системы (1) и входной последовательности W , которая удовлетворяет (2), как отношение l_2 нормы выходной последовательности $\{z_k\}$ к l_2 норме входной последовательности $\{w_k\}$:

$$\Theta = \frac{\|z_k\|_2}{\|w_k\|_2} = \frac{\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}[|z_k|^2]}}{\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}[|w_k|^2]}}$$

где $|w_k|$ – евклидова норма вектора w_k в \mathbb{R}^m . Определим автокорреляционную свёртку $K(l)$ входной последовательности $\{w_k\}$ следующим образом:

$$K(l) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}[w_{k+l} w_k^T]$$

Выполним Фурье преобразование автокорреляционной свёртки

$$S(\omega) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} K(l) e^{-i\omega l}.$$

Обратное преобразование Фурье позволяет стандартным способом выразить автокорреляционную свёртку $K(l)$ через матрицу спектральной плотности $S(\omega)$

$$K(l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S(\omega) e^{i\omega l} d\omega$$

и тогда l_2 норма входной последовательности $\{w_k\}$ будет равна

$$\|w_k\|_2^2 = \text{tr } K(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \text{tr } S(\omega) d\omega.$$

Соответственно, l_2 норма выходной последовательности $\{z_k\}$ равна

$$\|z_k\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \text{tr } S_z(\omega) d\omega,$$

где $S_z(\omega)$ – спектральная плотность выходной последовательности $\{z_k\}$, которая выражается через передаточную матрицу $G(s) = C(sI - A)^{-1} + D$ системы (1) и спектральную плотность $S(\omega)$ входного сигнала следующим образом [2]:

$$S_z(\omega) = \widehat{G}(\omega) S(\omega) \widehat{G}^*(\omega),$$

здесь $\widehat{G}(\omega) = \lim_{r \rightarrow 1-0} G(re^{i\omega})$ – значение передаточной функции $G(s)$ на единичной окружности. Тогда квадрат коэффициента усиления Θ будет равен

$$(3) \quad \Theta^2 = \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} \text{tr} [\widehat{G}(\omega) S(\omega) \widehat{G}^*(\omega)] d\omega}{\int_{-\pi}^{+\pi} \text{tr } S(\omega) d\omega} = \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} \text{tr} [\Lambda(\omega) S(\omega)] d\omega}{\int_{-\pi}^{+\pi} \text{tr } S(\omega) d\omega},$$

где $\Lambda(\omega) = \widehat{G}^*(\omega) \widehat{G}(\omega)$. Следуя работе [1], введём интегральную характеристику входной последовательности – σ -энтропию

$$(4) \quad \mathfrak{S}(S) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \ln \det \frac{S(\omega)}{\int_{-\pi}^{+\pi} \text{tr } S(\omega) d\omega} d\omega$$

и определим σ -энтропийную норму $\|F\|_s$ системы (1–2) как максимум коэффициента усиления (3) по всем входам, σ -энтропия (4) которых не превышает заданного значения s :

$$(5) \quad \|F\|_s^2 = \sup_{\Theta(S) \leq s} \Theta^2 = \sup_{\Theta(S) \leq s} \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} \text{tr}[\Lambda(\omega)S(\omega)] d\omega}{\int_{-\pi}^{+\pi} \text{tr} S(\omega) d\omega}.$$

Теорема 1. Для любого $s \geq 0$ σ -энтропийная норма (5) системы (1), на вход которой поступает стохастический дискретный сигнал с конечной l_2 нормой (2), вычисляется по формуле

$$\|F\|_s^2 = \frac{\int_{-\pi}^{+\pi} \text{tr}\{\Lambda(\omega)[I - q\Lambda(\omega)]^{-1}\} d\omega}{\int_{-\pi}^{+\pi} \text{tr}[I - q\Lambda(\omega)]^{-1} d\omega},$$

где параметр $q \in \left[0, \max_{\omega} \lambda_{\max}^{-1}(\omega)\right)$ и является единственным решением уравнения

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \ln \det \frac{[I - q\Lambda(\omega)]^{-1}}{\int_{-\pi}^{+\pi} \text{tr}[I - q\Lambda(\omega)]^{-1} d\omega} d\omega = s.$$

2. Линейная непрерывная система

Рассмотрим объект, который описывается линейной стационарной системой с непрерывным временем и нулевыми начальными условиями:

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), & x(0) = 0, \\ z(t) = Cx(t) + Dw(t), \end{cases}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – асимптотически устойчивая матрица, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта, $w(t) \in \mathbb{R}^m$ – внешний случайный сигнал, $z(t) \in \mathbb{R}^p$ – наблюдаемый выход. Предполагается, что система является управляемой и наблюдаемой, а случайный сигнал $w(t)$ ограничен по L_2 норме $\|w(t)\|_2$:

$$(7) \quad \|w(t)\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}[|w(t)|^2] dt} < \infty.$$

Определим коэффициент усиления Θ для системы (6) и входного сигнала (7) как отношение L_2 нормы выходного сигнала $z(t)$ к L_2 норме входного сигнала $w(t)$:

$$\Theta = \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} = \frac{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}[|z(t)|^2] dt}}{\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}[|w(t)|^2] dt}},$$

по аналогии с дискретным случаем определим автокорреляционную свёртку $K(\tau)$ входного сигнала $K(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}[w(t+\tau)w^T(t)] dt$, выполним ее Фурье преобразование

$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$ и выразим L_2 норму сигнала $w(t)$ через матрицу спектральной плотности $S(\omega)$:

$$\|w(t)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} S(\omega) d\omega.$$

Соответственно, L_2 норма выходного сигнала $z(t)$ равна

$$\|z(t)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} S_z(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[G(i\omega)S(\omega)G^*(i\omega)] d\omega,$$

где спектральная плотность $S_z(\omega)$ выходного сигнала $z(t)$ определяется согласно [3] через передаточную матрицу $G(s) = C(sI - A)^{-1} + D$ системы (6) и спектральную плотность $S(\omega)$ входного сигнала. Следовательно, квадрат коэффициента усиления Θ будет равен

$$(8) \quad \Theta^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[G(i\omega)S(\omega)G^*(i\omega)] d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} S(\omega) d\omega} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[\Lambda(\omega)S(\omega)] d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} S(\omega) d\omega}.$$

Теперь по аналогии с дискретным случаем введём интегральную характеристику входного сигнала – σ -энтропию. Казалось бы, что естественно было бы определить σ -энтропию непрерывного сигнала следующим образом:

$$(9) \quad \mathfrak{S}(S) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \det \frac{S(\omega)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} S(\omega) d\omega} d\omega.$$

Однако такое определение не совсем корректно: дело в том, что конечность L_2 нормы (7) сигнала не обеспечивает интегрируемость σ -энтропии (9). Действительно, пусть $S(\omega)$ является рациональной функцией, тогда из её интегрируемости следует асимптотика $S(\omega) \sim \omega^{-\alpha} S_\infty$ при $\omega \rightarrow \infty$, где $\alpha \geq 2$ и S_∞ – некоторая матрица. Но такая асимптотика ведёт к расходимости интеграла (9), поскольку

$$\ln \det S(\omega) = \ln \det S_\infty - \alpha m \ln \omega + O(\omega^{-1}), \quad \omega \rightarrow \infty$$

и, следовательно, функция $\ln \det S(\omega)$ не интегрируема. Чтобы справиться с этой расходимостью, немного модифицируем определение σ -энтропии:

$$(10) \quad \mathfrak{S}(S) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega_0, \omega) \ln \det \frac{S(\omega)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} S(\omega) d\omega} d\omega,$$

где функция $\varphi(\omega_0, \omega) > 0$ такая, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega_0, \omega) d\omega < \infty$. Иначе говоря, функция $\varphi(\omega_0, \omega)$ должна обеспечивать интегрируемую асимптотику при $\omega \rightarrow \infty$. Например, $\varphi(\omega_0, \omega)$ можно выбрать в виде

$$\varphi(\omega_0, \omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + \omega^2} \quad \text{или} \quad \varphi(\omega_0, \omega) = \frac{1}{\exp \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{(\Delta\omega)^2} + 1}.$$

И наконец, определим σ -энтропийную норму $\|F\|_s$ системы (6) как максимум коэффициента усиления (8) по всем входам, σ -энтропия $\mathfrak{S}(S)$ которых не превышает заданного значения s :

$$(11) \quad \|F\|_s^2 = \sup_{\mathfrak{S}(S) \leq s} \Theta^2 = \sup_{\mathfrak{S}(S) \leq s} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[\Lambda(\omega)S(\omega)] d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr} S(\omega) d\omega}.$$

Теорема 2. Для любого $s \geq 0$ σ -энтропийная норма (11) системы (6), на вход которой поступает непрерывный стохастический сигнал с конечной L_2 нормой (7), вычисляется по формуле

$$\|F\|_s^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega_0, \omega) \text{tr} \left\{ \Lambda(\omega) [I - q\Lambda(\omega)]^{-1} \right\} d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega_0, \omega) \text{tr} [I - q\Lambda(\omega)]^{-1} d\omega},$$

где параметр $q \in \left[0, \max_{\omega} \lambda_{\max}^{-1}(\omega) \right)$ и является единственным решением уравнения

$$-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega_0, \omega) \ln \det \frac{\varphi(\omega_0, \omega) [I - q\Lambda(\omega)]^{-1}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega_0, \omega) \text{tr} [I - q\Lambda(\omega)]^{-1} d\omega} d\omega = s.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-08-00185 А.

Список литературы

1. Бойченко В.А. Новый подход к анализу линейных систем управления // Материалы XIV Международной конференции «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» (конференция Пятницкого). М.: ИПУ РАН, 2018. С. 81-84.
2. Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В. Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // Доклады Академии наук. 1995. Т. 342, № 5. С. 583-585.
3. Zhou K., Glover K., Bodenheimer B., Doyle J. Mixed \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ Performance Objectives I: Robust Performance Analysis // IEEE Transactions on Automatic Control. 1994. Vol. 39, No. 8. P. 1564-1574.