УДК 519.246.2

УСТОЙЧИВАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ФИЛЬТРАЦИИ ВОНЭМА

А.В. Борисов

Институт проблем информатики ФИЦ ИУ РАН

Россия, 119333, Москва, Вавилова, д. 44, кор. 2

E-mail: ABorisov@frccsc.ru

Ключевые слова: марковский скачкообразный процесс, оптимальная нелинейная фильтрация, устойчивый алгоритм численного решения, точность аппроксимации.

Аннотация: В работе представлен класс устойчивых алгоритмов, реализующих фильтрацию состояний марковских скачкообразных процессов (МСП) по косвенным непрерывным наблюдениям в присутствии винеровских шумов. Полученные численные схемы основаны на решении задачи оптимальной фильтрации состояний МСП по непрерывным наблюдениям, дискретизованным по времени. Для этих оценок представлены эффективные приближенные схемы вычисления, базирующиеся на учете ограниченного числа возможных скачков МСП на интервале дискретизации. Предложенные аппроксимации обладают свойствами неотрицательности и нормировки, для них получены характеристики их локальной и глобальной точности.

1. Введение

Целью работы является представление класса алгоритмов численного решения задачи оптимальной фильтрации состояний МСП по косвенным наблюдениям с аддитивными и/или мультипликативными шумами. Предлагаемые алгоритмы являются устойчивыми в том смысле, что вычисленные с их помощью аппроксимации условного распределения гарантированно обладают свойствами неотрицательности и нормировки.

Работа имеет следующую структуру. Раздел 2 содержит постановку задачи фильтрации МСП по непрерывным наблюдениям, дискретизованным по времени. В разделе 3 представлено решение данной задачи. Формула оптимальной оценки содержит крайне ресурсоемкие операции численного интегрирования. Для сокращения объема вычислений оптимальную оценку предлагается приближать сходящейся последовательностью устойчивых аппроксимаций, ограничивающих число возможных скачков МСП на интервале дискретизации. Для этих аппроксимаций получены локальная и глобальная характеристики точности. В разделе 4 получены итоговые характеристики точности предлагаемых аппроксимаций оптимальной оценки, использующих различные схемы численного интегрирования. Они вычислены для случая наблюдений с аддитивными шумами. Заключительные выводы представлены в разделе 5.

2. Постановка задачи фильтрации по дискретизованным наблюдениям

На полном вероятностном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0})$ рассматривается система наблюдений

$$\begin{cases} X_t = X_0 + \int_0^t \Lambda^\top X_s ds + \mu_s, \\ Y_r = \int_{t_{r-1}}^{t_r} f X_s ds + \int_{t_{r-1}}^{t_r} \sum_{n=1}^N X_s^n g_n^{1/2} dW_s, \quad \{t_r\}_{r\in\mathbb{Z}_+} : t_r = rh, \end{cases} \tag{1}$$

где

- $X_t \triangleq \mathrm{col}(X_t^1, \ldots, X_t^N) \in \mathbb{S}^N$ — ненаблюдаемое состояние системы, являющееся однородным *марковским скачкообразным процессом* (МСП) с конечным множеством состояний $\mathbb{S}^N \triangleq \{e_1, \ldots, e_N\}$ ($\mathbb{S}^N$ — множество единичных векторов евклидова пространства $\mathbb{R}^N$), матрицей интенсивностей переходов Λ и начальным распределением π; $\mu_t \triangleq \mathrm{col}(\mu_t^1, \ldots, \mu_t^N) \in \mathbb{R}^N$ — $\mathcal{F}_t$-согласованный мартингал;
- $\{Y_r\}_{r\in\mathbb{N}}$: $Y_r \triangleq \mathrm{col}(Y_r^1, \ldots, Y_r^M) \in \mathbb{R}^M$ — последовательность дискретизованных наблюдений, доступных в известные неслучайные моменты времени $\{t_r\}_{r\in\mathbb{N}}$, в которых $W_t \triangleq \mathrm{col}(W_t^1, \ldots, W_t^M) \in \mathbb{R}^M$ — $\mathcal{F}_t$- согласованный стандартный винеровский процесс, определяющий шумы в наблюдениях, f — $(M\times N)$-мерная матрица плана наблюдений, а невырожденные симметричные матрицы $\{g_n\}_{n=\overline{1,N}}$ характеризуют интенсивности шумов в зависимости от текущего состояния X_t.

Рассмотрим неубывающее семейство σ-алгебр, порожденное последовательностью наблюдений: $\mathcal{O}_r \triangleq \sigma\{Y_\ell : 1 \leqslant \ell \leqslant r\}$, $\mathcal{O}_0 \triangleq \{\varnothing, \Omega\}$.

Задача оптимальной фильтрации состояния X по дискретизованным наблюдениям Y заключается в нахождении *условного математического ожидания* (УМО)

$$\widehat{X}_r \triangleq \mathsf{E}\{X_{t_r}|\mathcal{O}_r\}.$$

Наблюдения $\{Y_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ являются дискретизацией по времени процесса

$$Y_t = \int_0^t f X_s ds + \int_0^t \sum_{n=1}^N X_s^n g_n^{1/2} dW_s,$$

и исходная задача фильтрации заключается в нахождении УМО $\mathsf{E}\left\{X_t|\mathcal{F}_t^Y\right\}$ состояния МСП относительно непрерывных наблюдений. Однако при реализации любого алгоритма оценивания по непрерывным наблюдениям на современных средствах вычислительной техники в качестве непременного шага присутствует операция дискретизации наблюдений по времени. В дальнейшем обычно используются те или иные аппроксимации в дискретном времени решения стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) фильтра Вонэма или его обобщения [1,2]. В данной работе предлагается другой подход: вместо численного решения СДУ в дискретные моменты времени предлагается обрабатывать дискретизованные наблюдения оптимальным образом, строя максимально точные оценки по таким наблюдениям.

3. Решение задачи оптимальной фильтрации и ее аппроксимация

Распределение Y_r относительно σ-алгебры $\mathcal{F}^X_{t_r} \vee \mathcal{O}_{r-1}$ является гауссовским с параметрами $\mathsf{E}\left\{Y_r|\mathcal{F}^X_{t_r}\right\} = f\tau_r$ и $\mathrm{cov}(Y_r, Y_r|\mathcal{F}^X_{t_r}) = \sum_{n=1}^N \tau_r^n g_n$, где $\tau_r = \mathrm{col}(\tau_r^1, \dots, \tau_r^N) \triangleq \int_{t_{r-1}}^{t_r} X_s ds$ — случайный вектор, n-я компонента которого равна случайному времени пребывания процесса X в состоянии e_n на отрезке $[t_{r-1}, t_r]$. Обозначим через $\mathcal{D} \triangleq \{u = \mathrm{col}(u^1, \dots, u^N) : \ u_m \geqslant 0, \ \sum_{m=1}^M u_m = h\}$ — $(M-1)$-мерный симплекс в пространстве $\mathbb{R}^M$, являющийся носителем распределения τ_r. Пусть $\rho^{k,\ell}(du)$ — распределение $X^\ell_{t_r}\tau_r$ при условии $X_{t_{r-1}} = e_k$, то есть для $\forall\ \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ верно равенство $\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\tau(\omega))X^\ell_{t_r}(\omega)|X_{t_{r-1}} = e_k\right\} = \int_{\mathcal{A}} \rho^{k,\ell}(du)$. Также используем выражение $\mathcal{N}(y, m, K) \triangleq (2\pi)^{-M/2}\mathrm{det}^{-1/2}K \exp\left\{-\frac{1}{2}\|y - m)\|^2_{K^{-1}}\right\}$ для обозначения M-мерной плотности гауссовского распределения с математическим ожиданием m и невырожденной ковариационной матрицей K.

Следующее утверждение представляет решение задачи оптимальной фильтрации состояния МСП по дискретизованным наблюдениям.

Теорема 1. *[3] Если для системы наблюдения (1) верны условия а) и б), то оценка $\widehat{X}_r$ оптимальной фильтрации определяется следующими формулами:*

$$(2) \qquad \widehat{X}^j_r = \frac{\int_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\Big(Y_r, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p\Big) \sum_{k=1}^N \widehat{X}^k_{r-1}\rho^{k,j}(du)}{\int_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\Big(Y_r, fv, \sum_{q=1}^N v^q g_q\Big) \sum_{i,\ell=1}^N \widehat{X}^i_{r-1}\rho^{i,\ell}(dv)}, \qquad j = \overline{1, N}; \qquad \widehat{X}_0 = \pi.$$

Формула (2) содержит ресурсоемкие операции интегрирования по абстрактной мере, коей является $\rho^{k,j}_r$, поэтому предлагается аппроксимировать эти интегралы более простыми с вычислительной точки зрения, ограничивая в процедуре оценивания число скачков N_r состояния X_t на отрезке дискретизации $[t_{r-1}, t_r]$.

Пусть $\rho^{k,j,m}(du)$ — распределение $\tau_r X^j_{t_r}\mathbf{I}_{\{m\}}(N_r)$ при условии $X_{t_{r-1}} = e_k$, т.е. для $\forall\ \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ верно равенство $\mathsf{E}\left\{\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(\tau(\omega))X^j_{t_r}(\omega)\mathbf{I}_{\{m\}}(N_r(\omega))|X_{tr-1} = e_k\right\} = \int_{\mathcal{A}} \rho^{k,j,m}(du)$. Построим *аналитические аппроксимации* $\overline{X}_r(s)$ *s-го порядка оценки* $\widehat{X}_r$:

$$(3) \quad \overline{X}^j_r(s) = \frac{\int_{\mathcal{D}}\mathcal{N}\Big(Y_r, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p\Big)\sum_{n=0}^s\sum_{k=1}^N \overline{X}^k_{r-1}(s)\rho^{k,j,n}(du)}{\int_{\mathcal{D}}\mathcal{N}\Big(Y_r, fv, \sum_{q=1}^N v^q g_q\Big)\sum_{m=0}^s\sum_{i,\ell=1}^N \overline{X}^i_{r-1}(s)\rho^{i,\ell,m}(dv)}, \ j = \overline{1, N}; \quad \overline{X}_0(s) = \pi.$$

На основе формулы полной вероятности можно вычислить слагаемые в числителе и знаменателе (3) для $s = 0, 1, 2$ (δ_{ij} — символ Кронекера):

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\Big(Y_r, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p\Big)\rho^{k,j,0}(du) = \delta_{kj}\mathcal{N}\Big(Y_r, hf^j, hg_j\Big)e^{\lambda_{jj}h},$$

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\Big(Y_r, fu, \sum_{p=1}^N u^p g_p\Big)\rho^{k,j,1}(du) =$$
$$= (1 - \delta_{kj})\lambda_{kj}e^{\lambda_{jj}h}\int_0^h e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{jj})u}\mathcal{N}\Big(Y_r, uf^k + (h-u)f^j, ug_k + (h-u)g_j\Big)du,$$

$$\int_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\Big(Y_{r+1}, fu, \sum_{p=1}^{N} u^p g_p g_p^\top\Big)\rho_{r+1}^{k,j,2}(du) = \sum_{\substack{i: i\neq k,\\ i\neq j}} \lambda_{ki}\lambda_{ij} e^{\lambda_{jj}\Delta} \int_0^\Delta \int_0^{\Delta-u^k} e^{(\lambda_{kk}-\lambda_{ii})u^k+(\lambda_{ii}-\lambda_{jj})u^i} \times$$
$$\times\, \mathcal{N}\Big(Y_{r+1}, u^k f^k + u^i f^i + (\Delta-u^k-u^i) f^j, u^k g_k + u^i g_i + (\Delta-u^k-u^i) g_j\Big) du^i du^k,$$

где f^j — j-й столбец матрицы f. Слагаемые старшего порядка имеют более громоздкий вид.

Следующее утверждение содержит оценки локального и глобального показателей точности аналитической аппроксимации $\overline{X}_r(s)$ s-го порядка оценки $\widehat{X}_r$.

Теорема 2. *[3] В условиях теоремы 1 верны неравенства*

$$\sup_\pi \mathsf{E}\left\{\|\widehat{X}_1 - \overline{X}_1(s)\|_1\right\} \leqslant 2C\tfrac{(\overline{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!}, \quad \sup_\pi \mathsf{E}\left\{\|\widehat{X}_r - \overline{X}_r(s)\|_1\right\} \leqslant 2 - 2\left(1 - C\tfrac{(\overline{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!}\right)^r,$$

где $\overline{\lambda} \triangleq \max_{1\leqslant n\leqslant N} |\lambda_{nn}|$, *а* $C = C(h,\overline{\lambda}) \in (0,1)$ *— некоторый параметр. При этом верно неравенство* $C\frac{(\overline{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!} < 1$. *Если* $r = \frac{T}{h}$ *при фиксированном* $T > 0$ *и* $h \to 0$, *то*

$$\sup_\pi \mathsf{E}\left\{\|\widehat{X}_r - \overline{X}_r(s)\|_1\right\} \leqslant \tfrac{3C}{(s+1)!}\overline{\lambda}T(\overline{\lambda}h)^s.$$

4. Влияние численного интегрирования на точность аппроксимации

Интегралы в (3) могут быть вычислены лишь приближенно с помощью различных численных схем. Пусть

$$\xi_r^{kj}(s) \triangleq \sum_{m=0}^{s} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{N}\Big(Y_r, fu, \sum_{p=1}^{N} u^p g_p\Big)\rho^{k,j,m}(du), \qquad \xi_r^\top(s) \triangleq \|\xi_r^{kj}(s)\|_{k,j=\overline{1,N}},$$
$$\psi_r^{kj}(s) \triangleq \textstyle\sum_{\ell=1}^{L} \mathcal{N}\Big(Y_r, fv_\ell, \sum_{p=1}^{N} v_\ell^p g_p\Big)\varrho_\ell^{kj}, \qquad \psi_r^\top(s) \triangleq \|\psi_r^{kj}(s)\|_{k,j=\overline{1,N}} \; -$$

— матрицы, составленные из интегралов, представленных в (3), и некоторые их аппроксимации в виде интегральных сумм: $\varrho_\ell > 0$, $\ell = \overline{1,L}$ — положительные веса, $v_\ell \triangleq \mathrm{col}(v_\ell^1, \ldots, v_\ell^N) \in \mathcal{D}$ — точки. Рекуррентная схема (3) может быть записана в форме

$$\overline{X}_r(s) = \tfrac{1}{\mathbf{1}\xi_r(s)\widehat{X}_{r-1}(s)}\xi_r(s)\overline{X}_{r-1}(s), \qquad \overline{X}_0(s) = \pi,$$

а ее *численная реализация* имеет вид

$$\widetilde{X}_r(s) = \tfrac{1}{\mathbf{1}\psi_r(s)\widetilde{X}_{r-1}(s)}\psi_r(s)\widetilde{X}_{r-1}(s), \qquad \widetilde{X}_0(s) = \pi.$$

Следующее утверждение содержит оценки локальных показателей различия численной аппроксимации $\widetilde{X}_1(s)$, аналитической аппроксимации $\overline{X}_1(s)$ и оптимальной оценки $\widehat{X}_r$. Его доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и дополнительно*

$$\max_{k=\overline{1,N}} \mathsf{E}\left\{\frac{\sum_{j=1}^{N} |\psi_1^{kj}(s) - \xi_1^{kj}(s)|}{\sum_{i=1}^{N} \psi_1^{ki}}\right\} < \delta.$$

Тогда верны неравенства

$$\sup_\pi \mathsf{E}\left\{\|\widetilde{X}_1 - \overline{X}_1(s)\|_1\right\} \leqslant 2N\delta, \qquad \sup_\pi \mathsf{E}\left\{\|\widetilde{X}_1 - \widehat{X}_1(s)\|_1\right\} \leqslant 2\left(C\frac{(\overline{\lambda}h)^{s+1}}{(s+1)!} + N\delta\right).$$

Таким образом, если шаг h дискретизации по времени зафиксирован, то рациональным представляется такой выбор порядка s и схемы численного интегрирования, чтобы порядок слагаемых в правой части последнего неравенства был бы одинаковым.

При аддитивных шумах в наблюдениях ($g_n \equiv g$), аппроксимации первого порядка ($s = 1$) и использовании численного интегрирования методом «левых прямоугольников» при малых h имеет место соотношение $\sup_\pi \mathsf{E}\left\{\|\widetilde{X}_1(1) - \overline{X}_1(1)\|_1\right\} \sim h^{3/2}$. Это означает, что методическая ошибка, вносимая численным интегрированием, больше, чем эффект учета не более одного скачка МСП на интервале дискретизации h. Данный факт соответствует действительности: для численного решения СДУ, описывающих фильтр Вонэма, используется разностный метод Эйлера [4], также имеющий порядок точности 3/2 на одном шаге. В этих же условиях использование схемы «средних прямоугольников» при малых h обеспечивает соотношение $\sup_\pi \mathsf{E}\left\{\|\widetilde{X}_1(1) - \overline{X}_1(1)\|_1\right\} \sim h^{5/2}$. Таким образом, переход от схемы «левых» к схеме «средних прямоугольников» приводит к тому, методическая ошибка, вносимая численным интегрированием, соответствует точности аппроксимации 1-го порядка, учитывающей не более одного скачка МСП на интервале дискретизации: $\sup_\pi \mathsf{E}\left\{\|\widetilde{X}_1(1) - \widehat{X}_1\|_1\right\} \sim h^2$, что означает повышение точности аппроксимации при сохранении объема вычислений.

5. Заключение

Представленные результаты в области построения устойчивых алгоритмов фильтрации состояний МСП по косвенным наблюдениям в присутствии винеровских шумов нельзя считать законченными. Во-первых, необходимо найти показатели глобальной точности предложенных численных аппроксимаций. Во-вторых, для различных порядков s следует оценить точность численных аппроксимаций при наличии в наблюдениях мультипликативных шумов. Наконец, в-третьих, для случая наблюдений общего вида требуется получить скорость сходимости $\widetilde{X}_r(s)$ к предельной оценке $\mathsf{E}\left\{X_{t_r}|\mathcal{F}^Y_{t_r}\right\}$ фильтра Вонэма. Перечисленные вопросы могут являться направлениями дальнейших исследований.

Список литературы

1. Wonham W. Some applications of stochastic differential equations to optimal nonlinear filtering // SIAM Journal on Control. 1965. Vol. 2, No. 3. P. 347-369.
2. Борисов А.В. Фильтрация Вонэма по наблюдениям с мультипликативными шумами // Автоматика и телемеханика. 2018. № 1. С. 52-65.
3. Борисов А. Фильтрация состояний марковских скачкообразных процессов по дискретизованным наблюдениям // Информатика и ее применения. 2018. Т. 12, №. 3. С. 115-121.
4. Kloeden P., Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. Berlin: Springer, 1992. 632 p.