УДК 517.9

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАРТОВОГО УПРАВЛЕНИЯ И ФИНАЛЬНОГО НАБЛЮДЕНИЯ В МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

К.В. Васючкова
Южно-Уральский государственный университет
Россия, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76
E-mail: vasiuchkova@susu.ru

Н.А. Манакова
Южно-Уральский государственный университет
Россия, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76
E-mail: manakovana@susu.ru

Ключевые слова: уравнения соболевского типа; задача стартового управления и финального наблюдения; модель нелинейной фильтрации; проекционный метод Галеркина; метод декомпозиции.

Аннотация: Статья посвящена изучению стартового управления и финального наблюдения решений задачи Шоуолтера – Сидорова для математической модели нелинейной фильтрации. Строятся достаточные условия существования стартового управления и финального наблюдения слабыми обобщенными решениями исследуемой модели с начальным условием Шоуолтера – Сидорова. На основе метода фазового пространства, проекционного метода и методов декомпозиии и штрафа построен алгоритм численного метода нахождения приближенного решения задачи стартового управления и финального наблюдения. Приводятся вычислительные эксперименты.

1. Введение

Рассмотрим функциональные пространства $\mathfrak{N} = \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $\mathfrak{B} = L_p(\Omega)$, $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$, определенные в области $\Omega \subset \mathbb{R}$, где Ω – ограниченная область с границей класса C^∞. Через $\mathfrak{B}^*$ и $\mathfrak{N}^*$ обозначим сопряженные пространства к $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{N}$ относительно скалярного произведения $< \cdot, \cdot >$ в $\mathcal{H}$ соответственно. Если $n \geqslant 3$, $2 \leqslant p \leqslant 2 + \dfrac{4}{n-2}$, в силу теоремы вложения Соболева имеют место плотные и непрерывные вложения

$$\mathfrak{N} \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}^* \hookrightarrow \mathfrak{N}^*, \tag{1}$$

причем вложение $\mathfrak{N} \hookrightarrow \mathcal{H}$ компактно. Для заданных $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n \geqslant 3$, $2 \leqslant p \leqslant 2+\dfrac{4}{n-2}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $f \in L_2(0,T;\mathfrak{N}^*)$, $x_d \in \mathfrak{B}$ будем изучать задачу стартового управления и финального наблюдения

$$J(x(T), u) = \vartheta \|x(T) - x_d\|_{\mathfrak{B}}^p + (1-\vartheta)\|u\|_{\mathfrak{N}}^2 \to \inf, \quad \vartheta \in (0,1), \tag{2}$$

где $x_d = x_d(s)$ – требуемое состояние системы, которое необходимо достичь при минимальном начальном воздействии по прошествии времени $t = T$, а переменная $x \in L_\infty(0,T;\mathrm{coim}L) \cap L_p(0,T;L_p(\Omega))$ зависит от управления $u \in \mathfrak{N}$. То есть фазовая переменная x

- является слабо обобщенным решением уравнения Осколкова нелинейной фильтрации

  $$(\lambda - \Delta)x_t - \alpha\Delta x + |x|^{p-2}x = f \text{ в цилиндре } \Omega \times \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

  где функция $x = x(s,t)$ характеризует давление фильтрующейся жидкости, свободный член $f = f(s,t)$ – внешнее воздействие, а параметры $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$ характеризуют вязкие и упругие свойства жидкости соответственно, причем экспериментально было отмечено, что отрицательные значения параметра λ не противоречат физическому смыслу задачи [1];

- удовлетворяет начальному условию Шоуолтера – Сидорова

  $$(\lambda - \Delta)(x(s,0) - u(s)) = 0, \quad s \in \Omega; \tag{4}$$

- удовлетворяет краевому условию Дирихле

  $$x(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+. \tag{5}$$

Впервые уравнение (3) описано в работе А.П. Осколкова [2]. В целом, уравнение (3) показывает зависимость вязкоупругой несжимаемой жидкости (например, нефти), фильтрующейся в пористом пласте, от внешней нагрузки (например, давления воды, нагнетаемой по скважинам в пласт). Модель (3), (5), именуемая моделью Осколкова нелиненой фильтрации, исследовалась в работах [1-3]. Уравнение (3) принадлежит классу полулинейных уравнений соболевского типа с p-коэрцитивным s-монотонным оператором. Впервые уравнение данного типа было рассмотрено в [4]. Отметим, что p-коэрцитивный оператор является сильно коэрцитивным, а s-монотонным оператор – строго монотонным. Операторы $L,\ M,\ N$ определим формулами

$$\langle Lx, y\rangle = \int_\Omega (\lambda xy + \nabla x \cdot \nabla y)ds \quad \forall x, y \in \mathfrak{N};$$

$$\langle Mx, y\rangle = \int_\Omega \alpha \nabla x \cdot \nabla y \; ds \quad \forall x, y \in \mathfrak{N};$$

$$\langle N(x), y\rangle = \int_\Omega |x|^{p-2}xy \; ds \quad \forall x, y \in \mathfrak{B}.$$

Обозначим через $\{\varphi_k\}$ последовательность собственных функций однородной задачи Дирихле для оператора $(-\Delta)$ в области Ω, а через $\{\lambda_k\}$ соответствующую им последовательность собственных значений, занумерованную по неубыванию с учетом кратности.

Лемма 1. [5] *(i) При всех $\lambda \geqslant -\lambda_1$ оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^*)$ самосопряжен, фредгольмов и неотрицательно определен.*
(ii) Для любых $\alpha \in \mathbb{R}_+$ оператор $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}^*)$ симметричен и 2-коэрцитивен.
(iii) Оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^*)$ p-коэрцитивный и s-монотонный.

Построим множество

$$\text{coim } L = \begin{cases} \mathfrak{N}, & \lambda > -\lambda_1; \\ \{x \in \mathfrak{N} : < x, \varphi_1 >= 0\}, & \lambda = -\lambda_1 \end{cases}$$

и пространство

$$\mathfrak{X} = \{x \mid x \in L_\infty(0, T; \text{coim}L) \cap L_p(0, T; L_p(\Omega)), \quad \dot{x}^1 \in L_2(0, T; \text{coim}L)\}.$$

Вектор-функцию $x \in \mathfrak{X}$ будем называть слабым обобщенным решением уравнения (3), если она удовлетворяет

$$\int\limits_0^T \varphi(t) \left[\int\limits_\Omega (\lambda x_t \omega + \nabla x_t \cdot \nabla \omega + \alpha \nabla x \cdot \nabla \omega + |x|^{p-2} x \omega) ds \right] dt =$$

$$= \int\limits_0^T \left[\varphi(t) \int\limits_\Omega u \omega ds \right] dt$$

$$\forall \omega \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega), \quad \forall \varphi \in L_2(0, T).$$

В силу вложений (1) последовательность собственных функций $\{\varphi_k\}$ образует базис в пространстве $\mathcal{H}$. Выберем в $\mathcal{H}$ ортонормальную систему функций $\{\varphi_k\}$ так, чтобы $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_l\} = \ker L$, $l = \dim \ker L$. Будем искать приближенные решения задачи $(3) - (5)$ в виде

$$x_m(s, t) = \sum_{k=1}^{m} a_k(t) \varphi_k(s), \quad m > l. \tag{6}$$

Теорема 1. [5] *Пусть $\lambda \geqslant -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n \geqslant 3$, $2 \leqslant p \leqslant 2 + \dfrac{4}{n-2}$, тогда при любых $u \in \mathfrak{N}$, $T \in \mathbb{R}_+$, $f \in L_2(0, T; \mathfrak{N}^*)$ существует единственное решение $x \in \mathfrak{X}$ задачи $(3) - (5)$.*

Теорема показывает сходимости галеркинских приближений (6) к слабому обобщенному решению задачи $(3) - (5)$. Построим пространство управлений $\mathfrak{U} = \mathfrak{N}$ и выберем $\mathfrak{U}_{ad} \subset \mathfrak{U}$ – непустое, замкнутое, выпуклое множество.

Определение 1. *Пару $(\hat{x}(T), \ \hat{u}) \in \mathfrak{N} \times \mathfrak{U}_{ad}$ будем называть решением задачи $(2) - (5)$, если*

$$J(\hat{x}(T), \hat{u}) = \inf_{(x(T), u)} J(x(T), u),$$

где пары $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$ удовлетворяют задаче $(3) - (5)$ в слабом обобщенном смысле.

Теорема 2. *Пусть* $\lambda \geqslant -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n \geqslant 3$, $2 \leqslant p \leqslant 2 + \dfrac{4}{n-2}$, *тогда при любых* $T \in \mathbb{R}_+$, $f \in L_2(0,T;\mathfrak{N}^*)$ *существует единственное решение* $(\hat{x}(T), \hat{u})$ *задачи* $(2)-(5)$.

Некоторые физические процессы описываются сложными математическими моделями, и не всегда возможно нахождение аналитических решений, поэтому построение численных алгоритмов решения задач становится все более актуальным. Теоремы 1 и 2 устанавливают существование решения, но не описывают метода его нахождения. Для численного исследования модели нелинейной фильтрации линеаризуем уравнение (3) при помощи методов штрафа и декомпозиции, тогда задача $(2)-(5)$ эквивалентна задаче

$$L\,\dot{x} + M_1 x + N(v) = f, \quad x(u,v) = v, \tag{7}$$

$$L(x(0) - u(s)) = 0, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad}, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} J^{\varepsilon}_{\theta}(x(T), v(T), u) = \theta \cdot \vartheta \|x(T) - x_d\|^p_{\mathfrak{B}} + \\ +(1-\theta)\cdot\vartheta\|v(T) - x_d\|^p_{\mathfrak{B}} + (1-\vartheta)\|u\|^2_{\mathfrak{N}} + r_\varepsilon \|x - v\|^4_{\mathfrak{B}} \to \inf, \quad \theta, \vartheta \in (0,1), \end{gathered} \tag{9}$$

где $r_\varepsilon \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0+$.

Определение 2. *Тройку* $(\tilde{x}(T), \tilde{v}(T), \tilde{u}) \in \mathfrak{N}\times\mathfrak{N}\times\mathfrak{U}_{ad}$ *назовем решением задачи стартового управления и финального наблюдения* $(7)-(9)$, *если*

$$J^{\varepsilon}_{\theta}(\tilde{x}(T), \tilde{v}(T), \tilde{u}) = \inf_{(x(T),v(T),u)} J_\theta(x(T), v(T), u),$$

где тройка $(x, v, u) \in \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{ad}$ *удовлетворяет* (7), (8) *в слабом обобщенном смысле.*

Теорема 3. *Пусть* $\lambda \geqslant -\lambda_1$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $n \geqslant 3$, $2 \leqslant p \leqslant 2 + \dfrac{4}{n-2}$, *тогда при любых* $T \in \mathbb{R}_+$, $f \in L_2(0,T;\mathfrak{N}^*)$ *существует единственное решение* $(\hat{x}^\varepsilon, \hat{u}^\varepsilon, \hat{v}^\varepsilon) \in \mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{ad}$ *задачи* $(7)-(9)$, *причем* $\hat{x}^\varepsilon \to \hat{x}$, $\hat{v}^\varepsilon \to \hat{v}$, $\hat{u}^\varepsilon \to \hat{u}$ *при* $\varepsilon \to 0+$, *где* $(\hat{x}, \hat{u})$ *является решением задачи* $(2)-(5)$.

Используя теоретические результаты, полученные выше, нами был разработан и реализован алгоритм приближенного численного решения задачи стартового управления и финального наблюдения для модели нелинейной фильтрации на основе модифицированных методов декомпозиции, штрафа, Галеркина.

Пример. Требуется найти приближенное решение задачи стартового управления и финального наблюдения задачи $(2)-(5)$ на интервале $(0,\pi)$ в случае $\lambda = -1$, $T = \dfrac{2}{5}$, $\theta = \dfrac{21}{55}$, $\beta = \dfrac{999}{1000}$, $\varepsilon = \dfrac{1}{200}$, $m = 4$, $x_d = \dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\,\sin(2s)$, $f \equiv 0$. На основе разработанного численного метода нахождения стартового управления и финального наблюдения перейдем к эквивалентной задаче $(7)-(9)$, где

$$J(x(T), v(T), u) = \frac{21}{55}\cdot\frac{999}{1000}\int_0^\pi \left| x(s,T) - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\,\sin s \right|^4 ds +$$

$$+\left(1 - \frac{21}{55}\right)\cdot\frac{999}{1000}\int_0^\pi \left| v(s,T) - \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}}\,\sin s \right|^4 ds +$$

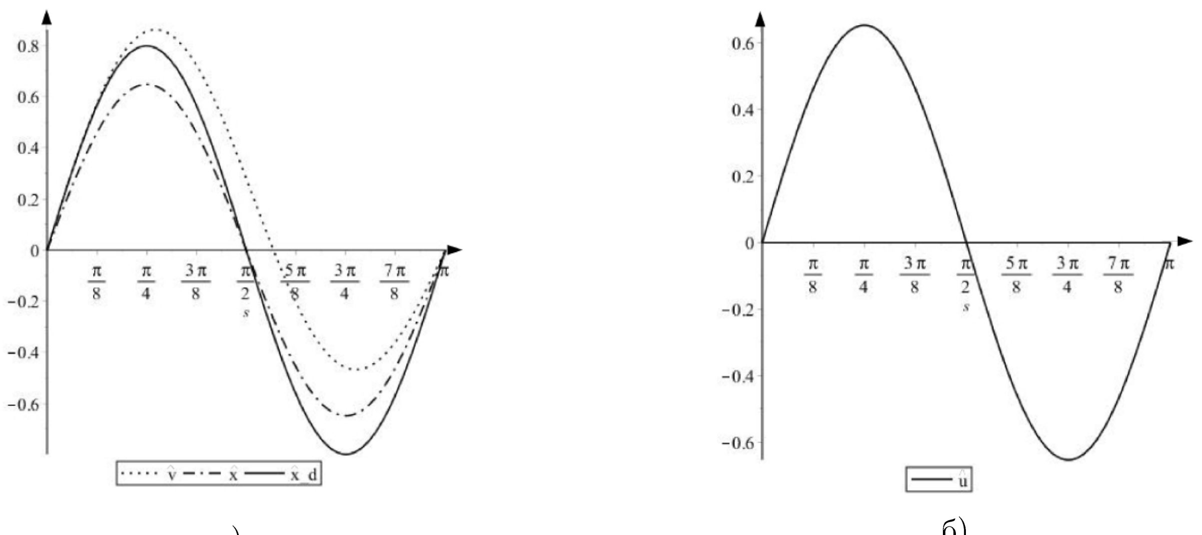
$$+\left(1-\frac{999}{1000}\right)\int_0^\pi\left[\left|u(s)\right|^2+\left|u^{'}(s)\right|^2\right]ds+200\int_0^\pi\int_0^T\left|x(s,t)-v(s,t)\right|^4 ds\,dt.$$

На основе проекционного метода Галеркина приближенное решение задачи представим $\tilde{x}(s,t)$, $\tilde{v}(s,t)$, $\tilde{u}(s)$ в виде сумм

$$\tilde{x}(s,t)=\sum_{k=1}^{m}x_k(t)\varphi_k(s),\quad \tilde{v}(s,t)=\sum_{k=1}^{m}v_k(t)\varphi_k(s),\quad \tilde{u}(s)=\sum_{k=1}^{m}u_k\varphi_k(s),$$

где $\varphi_k(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin ks$, $\lambda_k=k^2$, $k=1,2,\ldots$ В результате проведения вычислительного эксперимента было получено численное решение $(\tilde{x},\tilde{v},\tilde{u})$ задачи (2) – (5) (см. рис. 1), при которых значение функционала $J=0.002367456$. На рис. 1 а представлено сравнение искомых функций $\tilde{x}(s,t),\tilde{v}(s,t)$ с требуемым состоянием $x_d(s)$ в конечный момент времени $T=\dfrac{2}{5}$. При этом разность функций $\tilde{x}$ и $\tilde{v}$ мала:

$$\Delta=\left(\int_0^T\left(\int_0^\pi|\tilde{x}(s,t)-\tilde{v}(s,t)|^4ds\right)dt\right)^{\frac{1}{4}}=0.00326547223.$$



а) б)

Рис. 1. Численное решение задачи (2)–(5): а) искомое состояние системы $x(s,\dfrac{2}{5})$ и требуемое состояние $x_d(s)$; б) начальное состояние системы $u(s)$

При заданных параметрах упругости λ и вязкости α найдено такое начальное состояние системы $u(s)$, при котором давление фильтрующейся жидкости $x(s,t)$ в пористом пласте при заданной в начальный момент времени нагрузке $f(s,t)$ с течением времени $T=\dfrac{2}{5}$ близок к требуемому значению $x_d(s)$.

Список литературы

1. Амфилохиев В.Б., Войткунский Я.И., Мазаева Н.П. Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений // Труды Ленинградского ордена Ленина кораблестроительного института. 1975. Т. 96. С. 3-9.

2. Осколков А.П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева // Записки научного семинара ЛОМИ. 1991. Т. 198. С. 31-48.
3. Al'shin A. B., Korpusov M. O., Sveshnikov A. G. Blow-up in nonlinear Sobolev-type equations. Berlin, New York: Walter de Gruyter, 2011.
4. Свиридюк Г.А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска // Изв. вузов. Математика. 1989. № 2. С. 55-61.
5. Манакова Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 438, № 9. С. 1185-1192.