УДК 517.938

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА

В.Г. Волков
Научно-технический центр ПАО «КАМАЗ»
Россия, 423800, Набережные Челны, Транспортный проезд, 70
E-mail: volkovvg@kamaz.ru

Д.Н. Демьянов
ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Россия, 420008, Казань, Кремлевская ул., 18
E-mail: demyanovdn@mail.ru

Ключевые слова: динамическая система, внешние возмущения, оптимальное оценивание, порядок фильтра

Аннотация: В представленной работе рассматривается проблема построения оптимальных фильтров для оценки состояния динамических систем, подверженных ограниченным сигнальным возмущениям. Показано, что в ряде случаев для оценки линейного функционала переменных состояния могут быть использованы фильтры, порядок которых равен размерности оцениваемого вектора. При этом проблема оптимальной фильтрации может быть сведена к стандартной задаче оптимального гашения внешних возмущений и решена с использованием аппарата линейных матричных неравенств. Сформулированы условия разрешимости задачи в терминах технологии канонизации матриц, а также предложен пошаговый алгоритм аналитического синтеза оптимального фильтра пониженного порядка.

1. Введение

Оценка состояния динамических систем является достаточно важной задачей, решению которой посвящено значительное количество работ. При этом, с практической точки зрения, наибольший интерес представляет проблема оценивания состояния системы при наличии сигнальных возмущений, так как реальные объекты управления всегда подвержены влиянию внешних воздействий.

При оценке состояния систем с сигнальными возмущениями могут использоваться различные подходы. Так, например, информация о стохастической природе возмущающего воздействия и его статистических характеристиках позволяет сформировать фильтр Калмана [1, 2]; при известном законе изменения внешнего воздействия может быть использован метод расширения пространства состояний [3, 4]; для гипервыходных систем можно сформировать наблюдатели специальной структуры, инвариантные к сигнальным возмущениям [5, 6].

Однако, на практике, чаще всего, информация о внешних воздействиях отсутствует либо ограничивается сведениями о максимальной амплитуде или энергии сигнала. В таком случае задача сводится к построению фильтра, минимизирующего влияние возмущений на процесс оценивания. В частности, если возмущения принадлежат классу L_2

и не измеряются, то одним из эффективных способов решения задачи является применение методов H_∞-оптимальной фильтрации [7]. При этом показателем качества фильтрации выступает максимальное отношение L_2-нормы ошибки оценивания к L_2-норме внешнего возмущения.

В представленной работе рассматривается проблема построения H_∞-оптимального фильтра для оценивания совокупности линейных комбинаций переменных состояния. Очевидно, что решение указанной задачи можно получить с использованием фильтров полного порядка или фильтров люенбергеровского типа [8]. Однако, если размерность искомого вектора существенно меньше числа переменных состояния, интуитивно понятна определенная избыточность подобного подхода. В этом случае актуальной задачей можно считать построение H_∞-оптимального фильтра того же порядка, что и оцениваемый функционал.

2. Алгоритм построения фильтра

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему, заданную моделью в пространстве состояний:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Fw; \\ y = Cx. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $x \in R^n$ – вектор состояния; $u \in R^l$ – управляющее воздействие; $w \in R^r$ – возмущающее воздействие, ограниченное по норме L_2; $y \in R^m$ – измеряемый выходной сигнал; A, B, F, C – заданные числовые матрицы; $n > \max(m, l, r)$; $\operatorname{rank} C = m$.

Для системы (1) необходимо получить оценку совокупности линейных комбинаций переменных состояния, определяемой выражением:

$$z = Kx. \tag{2}$$

Здесь $z \in R^p$; K – известная числовая матрица ранга p; $p < n - m$. Не умаляя общности, будем полагать, что строки матриц C и K являются линейно-независимыми, т. е.:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} C \\ K \end{pmatrix} = m + p .$$

По аналогии с работами [8, 9] для оценки качества фильтрации будем использовать уровень гашения внешнего возмущения γ:

$$\gamma = \sup_{\|w\| \neq 0} \frac{\|\varepsilon\|}{\|w\|} ,$$

где $\varepsilon = \hat{z} - z$ – ошибка фильтрации сигнала (2).

Тогда задача оптимальной фильтрации состоит в построении фильтра порядка p, обеспечивающего наименьшее значение показателя γ.

2.2. Предварительные соотношения

Как было показано ранее [10], если выполняются принятые ограничения, то невырожденными преобразованиями переменных состояния систему (1) можно привести к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} \dot{y} \\ \dot{\mu} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \mu \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} w. \tag{3}$$

При этом вектор z будет определяться соотношением:

(4) $$z = K\widetilde{C}y + \mu.$$

Матричные коэффициенты уравнения (3) задаются следующими выражениями:

(5) $$\begin{cases} T = \left(\widetilde{C} \quad \overline{C}^R\widetilde{K}_1 \quad \overline{C}^R\overline{K}_1^R\right) = \left(T_1 \quad T_2 \quad T_3\right);\ V = T^{-1} = \left(V_1^T \quad V_2^T \quad V_3^T\right)^T; \\ K_1 = K\overline{C}^R;\ A_{ij} = V_iAT_j;\ B_i = V_iB;\ F_i = V_iF;\ i = \overline{1,3};\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

В формулах (4) – (5) и далее для произвольной матрицы M размера $m \times n$ и ранга r символом $\widetilde{M}^L$ обозначается ее левый канонизатор, $\overline{M}^L$ – левый делитель нуля, $\widetilde{M}^R$– правый канонизатор, $\overline{M}^R$ – правый делитель нуля. Произведение $\widetilde{M}^R\widetilde{M}^L$ называется сводным канонизатором и обозначается $\widetilde{M}$. Совокупность матриц $\widetilde{M}^L$, $\overline{M}^L$, $\widetilde{M}^R$, $\overline{M}^R$ удовлетворяет следующему равенству:

$$\begin{pmatrix} \widetilde{M}^L_{r,m} \\ \overline{M}^L_{m-r,m} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} \widetilde{M}^R_{n,r} & \overline{M}^R_{n,n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{r,r} & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{pmatrix}.$$

Описание канонизаторов и делителей нуля подробно изложено в работе [11].

2.3. Получение расчетных соотношений

Для оценки вектора z сформируем фильтр вида:

(6) $$\begin{cases} \dot{v} = \left(A_{22} - LA_{12}\right)v + \left(A_{21} - LA_{11} + A_{22}L - LA_{12}L\right)y + \left(B_2 - LB_1\right)u; \\ \hat{z} = \left(K\widetilde{C} + L\right)y + v; \\ L = A_{23}\widetilde{A}_{13} + Q\overline{A}_{13}^L. \end{cases}$$

В системе (6) матрица L подобрана таким образом, чтобы компенсировать взаимовлияние тех переменных состояния, которые не измеряются и не используются при вычислении выражения (4). Можно показать [10], что такое представление возможно, если выполняются условия $\widetilde{A}_{13}A_{13} = I$ и существует ненулевая матрица $\overline{A}_{13}^L$ ($\overline{A}_{13}^L \neq [\,]$).

Объединив выражения (3) – (6), получим закон изменения ошибки фильтрации:

(7) $$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= L\dot{y} + \dot{v} - \dot{\mu} = \left(A_{22} - LA_{12}\right)\varepsilon + \left(LF_1 - F_2\right)w = \\ &= \left(A_{22} - A_{23}\widetilde{A}_{13}A_{12} - Q\overline{A}_{13}^LA_{12}\right)\varepsilon + \left(A_{23}\widetilde{A}_{13}F_1 + Q\overline{A}_{13}^LF_1 - F_2\right)w. \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение следующие матричные коэффициенты:

(8) $$A_4 = A_{22} - A_{23}\widetilde{A}_{13}A_{12};\ A_5 = -\overline{A}_{13}^LA_{12};\ B_4 = A_{23}\widetilde{A}_{13}F_1 - F_2;\ B_5 = \overline{A}_{13}^LF_1.$$

Тогда исходную проблему можно свести к задаче построения H_∞-оптимального регулятора для системы (7) – (8). Записав задачу с пользованием формализма [12], получим следующее утверждение о возможности построения фильтра с требуемыми характеристиками.

Утверждение. *Для системы (1) при выполнении условий $\widetilde{A}_{13}A_{13} = I$ и $\overline{A}_{13}^L \neq [\,]$ существует фильтр вида (6), обеспечивающий требуемый уровень гашения внешнего возмущения $\gamma > 0$, тогда и только тогда, когда существуют матрицы $X = X^T > 0$ и Z, удовлетворяющие линейному матричному неравенству:*

(9) $$\begin{pmatrix} A_4^TX + XA_4 + A_5^TZ^T + ZA_5 & XB_4 + ZB_5 & I \\ B_4^TX + B_5^TZ^T & -\gamma I & 0 \\ I & 0 & -\gamma I \end{pmatrix} < 0.$$

В этом случае параметр фильтра вычисляется по формуле:

$$Q = X^{-1}Z.$$

Следствие. *Параметр H_∞-оптимального фильтра порядка p находится из выражения $Q_* = X_*^{-1} Z_*$, где X_* и Z_* – решение задачи:*

$$\gamma_* = \inf_{(9)} \gamma. \qquad (10)$$

Справедливость приведенного утверждения и следствия из него в явном виде следует из теорем работы [12].

Таким образом, алгоритм построения фильтра порядка p включает в себя следующие этапы.

1) Вычислить коэффициенты (5) и привести исходную систему к виду (3) – (4).
2) Проверить выполнение условий $\widetilde{A}_{13} A_{13} = I$ и $\overline{A}_{13}^{L} \neq [\,]$. Если эти условия не выполняются, то предлагаемый метод не применим (первое условие соответствует возможности исключения неизмеряемых и неоцениваемых переменных состояния из уравнения фильтра, а второе условие отвечает за множественность допустимых решений задачи).
3) Вычислить коэффициенты (8) и сформировать линейное матричное неравенство (9).
4) Найти решение задачи (10) – определить наименьшее значение γ и соответствующую ему матрицу Q_*.
5) Сформировать уравнение фильтра (6).
   Конец алгоритма.

3. Заключение

В работе приведены аналитические соотношения и пошаговый алгоритм построения оптимального фильтра, порядок которого равен порядку оцениваемого линейного функционала переменных состояния динамической системы. Показано, что решаемая проблема может быть сведена к задаче оптимального гашения внешних возмущений и представлена в виде линейного матричного неравенства. Сформулированы условия разрешимости задачи, основанные на применении технологии канонизации матриц и методах решения линейных матричных уравнений произвольной размерности. Полученные результаты могут быть использованы на практике для контроля параметров или диагностики технических объектов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-08-00516).

Список литературы

1. Фомин В.Н. Рекуррентное оценивание и адаптивная фильтрация. М.: Наука, 1984. 288 с.
2. Ribeiro M. I. Kalman and Extended Kalman Filters: Concept, Derivation and Properties. Lisboa: Institute for Systems and Robotics, 2004. 44 p.
3. Краснова С.А., Уткин В.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. М.: Наука, 2006. 272 с.
4. Асанов А.З., Демьянов Д.Н. Оценивание непосредственно неизмеряемых внешних возмущений с использованием функциональных наблюдателей // Автометрия. 2015. № 5. С. 27-34.
5. Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В. Методы построения наблюдателей для линейных динамических систем с неопределенностью // Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2008. Т. 262. С. 87-102.
6. Асанов А.З., Демьянов Д.Н. Аналитический синтез функциональных наблюдателей для систем с сигнальными возмущениями // Автометрия. 2014. № 6. С. 111-119.

7. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems // IEEE Trans. Automat. Control. 1989. Vol. 34, No. 8. P. 831-847.
8. Баландин Д.В., Коган М.М. Минимаксная фильтрация: γ_0-оптимальные наблюдатели и обобщенные H_∞-оптимальные фильтры // Автоматика и телемеханика. 2013. № 4. С. 43-58.
9. Баландин Д.В., Коган М.М. Обобщенная H_∞-оптимальная фильтрация при внешнем и начальном возмущениях // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1507-1514.
10. Асанов А.З., Демьянов Д.Н. Аналитический синтез функциональных наблюдателей // Изв. вузов. Авиационная техника. 2013. № 4. С. 13-18.
11. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. Калуга: Изд. науч. лит. Н.Ф. Бочкаревой, 2006. 720 с.
12. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. 280 с.