

# ИССЛЕДОВАНИЕ КАЛМАНОВСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

**Н.П. Деменков**

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
Россия, 107005, Москва, 2-я Бауманская, 5  
E-mail: [dnp@bmstu.ru](mailto:dnp@bmstu.ru)

**М.Д. Чан**

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана  
Россия, 107005, Москва, 2-я Бауманская, 5  
E-mail: [ruxi.tran@gmail.com](mailto:ruxi.tran@gmail.com)

**Ключевые слова:** алгоритм, расширенный фильтр Калмана, ансцентный фильтр Калмана, сильный отслеживающий фильтр Калмана, сильный отслеживающий ансцентный фильтр Калмана.

**Аннотация:** В данной работе рассмотрена разновидность калмановской фильтрации для нелинейной системы. Изложены алгоритмы расширенного, ансцентного, сильного отслеживающего фильтров Калмана и их комбинации. Приведен сравнительный анализ точности различных фильтров к нелинейной модели.

## 1. Введение

Проблема оценки состояния в нелинейных динамических системах получила значительное внимание, поскольку практически все системы связаны с нелинейностью того или иного вида. Одним из наиболее распространенных подходов является фильтр Калмана (*Kalman Filter* - *KF*) и его разновидности.

Расширенный фильтр Калмана (*Extended Kalman Filter* – *EKF*) применяется к нелинейным системам через линеаризацию системы и является надежным средством для слаболинейных систем. На практике фильтр *EKF* имеет два хорошо известных недостатка. Во-первых, это требует якобиевых матриц. Во-вторых, линеаризационная аппроксимация фильтра *EKF* может быть крайне неточной и поэтому может приводить к нестабильности фильтра [1-3].

Для преодоления присущих недостатков фильтра *EKF* было предложено много разных алгоритмов, один из которых представляет собой ансцентный фильтр Калмана (*Unscented Kalman Filter* - *UKF*). Фильтр *UKF* решает эту проблему, используя детерминированный подход к выборке. Распределение состояний представлено с использованием минимального набора тщательно отобранных весовых точек выборки, а не аппроксимируется гауссовской случайной величиной. Реализация фильтра *UKF* часто существенно проще и не требует аналитических якобиевых матриц. Фильтр *UKF* оказался превосходным стандартным фильтром *EKF* для оценки нелинейного состояния, оценки параметров (идентификация системы), а также двойной оценки. Однако, как и фильтр *EKF*, фильтр *UKF* чувствителен к неопределенности модели системы. При на-

личии неопределенности модели входные данные не могут отражать реальную модель и фильтрация будет ухудшаться или даже расходится [3,4].

Нелинейным более гладким алгоритмом по существу является сильный отслеживающий фильтр Калмана (*Strong Tracking Kalman Filter – STKF*). В фильтре *STKF* для обеспечения лучшей гладкости оценки состояния вводится субоптимальный коэффициент затухания (*Suboptimal Fading Factor - SFF*), в котором задействованы факторы смягчения. Фильтр *STKF* имеет несколько важных достоинств, включая сильную устойчивость к неопределенности моделей; хорошую стойкость в режиме реального времени, независимо от того, достигла ли система устойчивого состояния или нет; умеренную вычислительную нагрузку [5,6]. Традиционный подход фильтра *STKF* для определения факторов смягчения в значительной степени зависит от личного опыта или компьютерного моделирования с использованием схемы эвристического поиска.

Фильтр, называемый сильным отслеживающим ансамблевым фильтром Калмана (*Strong Tracking Unscented Kalman Filter - STUKF*), разработан на основе комбинации фильтров *UKF* и *STKF*. В фильтре *STUKF* для повышения устойчивости фильтра *UKF* к неопределенности модели процесса непосредственно добавлен фактор смягчения, используемый в *STKF*, на *UKF* [7-9]. Однако, подобно *STKF*, *STUKF* все еще зависит от решения двух серьезных проблем. Первая заключается в том, что для вычисления *SFF* требуется громоздкая оценка якобиевой матрицы. Вторая заключается в том, что *SFF* включен во весь процесс фильтрации, что приводит к потере точности во временных сегментах, в которых модель процесса определена.

В данной статье рассматриваются алгоритмы фильтров *EKF*, *UKF*, *STKF* и их комбинации *STUKF*, а также приводится сравнительный анализ точности различных фильтров применительно к нелинейной модели.

## 2. Постановка задачи

Нелинейная система описывается следующим образом

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{w}(t), \\ \mathbf{z} &= \mathbf{h}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(t),\end{aligned}$$

где  $\mathbf{x}$  – вектор состояния,  $\mathbf{w}$  – шум процесса,  $\mathbf{z}$  – вектор измерения,  $\mathbf{v}$  – шум измерения.  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{v}$  имеют соответственно нулевое математическое ожидание и ковариационные матрицы  $Q$  и  $R$ .

Требуется в каждый момент времени по результатам всех имеющихся к этому моменту измерений  $\mathbf{z}$  получить вектор оценки  $\hat{\mathbf{x}}$  и вектор состояния процесса  $\mathbf{x}$  с использованием расширенного фильтра Калмана, ансамблевого фильтра Калмана, сильного отслеживающего ансамблевого фильтра Калмана и их комбинации.

## 3. Алгоритмы исследуемых фильтров

### 3.1. Алгоритм расширенного фильтра

Процедура алгоритма *EKF* состоит из следующих этапов:

- 1) Инициализация  $\hat{\mathbf{x}}_0$  и  $P_0^-$ .
- 2) Предсказание состояния системы и ошибки ковариации:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = A_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^-; P_k^- = A_k P_{k-1}^- A_k^T + Q_k.$$

- 3) Вычисление коэффициента усиления:

$$K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + R_k]^{-1}.$$

4) Обновление оценки и ошибки ковариации:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k [Z_k - h_k(\hat{x}_k^-)]; P_k = (I - K_k H) P_k^-$$

где  $A_k = \left. \frac{\delta f_k}{\delta x} \right|_{x=\hat{x}_k^-}$ ,  $H_k = \left. \frac{\delta h_k}{\delta x} \right|_{x=\hat{x}_k^-}$ .

### 3.2. Алгоритм ансцентного фильтра

Процедура алгоритма UKF состоит из следующих этапов:

1) Инициализация  $\hat{x}_0$  и  $P_0^-$ .

2) Определение сигма-точек:

$$\varsigma_{k-1} = \left[ \hat{x}, \hat{x} + (\gamma \sqrt{P_{k-1}})_i^T, \hat{x} - (\gamma \sqrt{P_{k-1}})_i^T \right] \quad i = 1, 2, \dots, 2n$$

где  $\gamma = \sqrt{n + \lambda}$ ,  $\lambda = \alpha^2(n + \kappa) - n$ .

3) Определение весов:

$$W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = \frac{\lambda}{2(n + \lambda)}, \quad i = 1, 2, \dots, 2L$$

$$W_0^{(m)} = \frac{\lambda}{n + \lambda}, \quad W_0^{(c)} = \frac{\lambda}{n + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta).$$

Для гауссовских распределений  $\beta = 2$  является оптимальным.

4) Обновление состояния: определить набор преобразованных выборок, вычислить среднее значение и прогноз ковариации:

$$\varsigma_{k|k-1}^- = f(\varsigma_{k-1}); \hat{x}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \varsigma_{i,k|k-1}^-$$

$$(1) \quad P_{x_k}^- = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\varsigma_{i,k|k-1}^- - \hat{x}_k^-) (\varsigma_{i,k|k-1}^- - \hat{x}_k^-)^T + Q_k.$$

5) Обновление измерений: определить сигма-точки, вычислить среднее значение и вычислить прогноз ковариации для измерения:

$$\left( \varsigma_{z_k|k-1}^- \right)_i = h(\varsigma_{i,k|k-1}^-); \hat{z}_k^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(m)} \varsigma_{z_{i,k|k-1}^-}$$

$$(2) \quad P_{z_k} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} \left( \varsigma_{z_{i,k|k-1}^-} - \hat{z}_k^- \right) \left( \varsigma_{z_{i,k|k-1}^-} - \hat{z}_k^- \right)^T + R_k.$$

6) Корректировка: определить кросс-ковариация  $P_{xz}$ , коэффициент усиления, обновление оценки и ошибки ковариации:

$$(3) \quad P_{xz} = \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\varsigma_{i,k|k-1}^- - \hat{x}_k^-) \left( \varsigma_{z_{i,k|k-1}^-} - \hat{z}_k^- \right)^T$$

$$K_k = P_{xz} P_{z_k}^{-1}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - \hat{z}_k^-)$$

$$P_{x_k} = P_{x_k}^- - K_k P_{z_k} K_k^T.$$

### 3.3. Алгоритм сильного отслеживающего фильтра

Ключевым параметром в фильтре *STKF* является матрица субоптимального коэффициента затухания  $\lambda_k$ , которая зависит от трех параметров: априорного коэффициента  $\alpha_i$ ; коэффициента забывания  $\rho$ ; и коэффициента смягчения  $\beta$ . Эти параметры обычно выбираются эмпирически ( $\alpha_i \geq 1$ ;  $0 \leq \rho \leq 1$ ;  $1 \leq \beta \leq 5$ ). Фактор смягчения  $\beta$  используется для улучшения гладкости оценки состояния. Чем больше  $\beta$  ( $\beta \geq 1$ ), тем лучше точность оценки, а меньшее значение  $\beta$  обеспечивает более высокую способность отслеживания.

Процедура алгоритм фильтра *STKF* состоит из следующих этапов:

1) Инициализация  $\hat{x}_0$  и  $P_0^-$ .

2) Вычисление коэффициента усиления:

$$K_k = P_k^- H_k^T [H_k P_k^- H_k^T + R_k]^{-1}.$$

3) Обновление оценки и ошибки ковариации:

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k [z_k - h_k(\hat{x}_k^-)]; P_k = (I - K_k H) P_k^-.$$

4) Определение субоптимального масштабного коэффициента  $\lambda_k$ :

$$V_k = \begin{cases} v_0 v_0^T, & k = 0 \\ \frac{[\rho V_{k-1} + v_k v_k^T]}{1 + \rho}, & k \geq 1 \end{cases}; v_k = z_k - \hat{z}_k^-$$

$$N_k = V_k - \beta R_k - H_k Q_k H_k^T; M_k = H_k A_k P_k A_k^T H_k^T$$

$$c_k = \frac{\text{tr}[N_k]}{\text{tr}[M_k]}, \lambda_{i,k} = \begin{cases} \alpha_i c_k, & \alpha_i c_k \geq 1 \\ 1, & \alpha_i c_k < 1 \end{cases}$$

$$\lambda_k = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m).$$

5) Предсказание состояния системы и ошибки ковариации:

$$\hat{x}_{k+1}^- = A_k \hat{x}_k^-; P_{k+1}^- = \lambda_k A_k P_k^- A_k^T + Q_k.$$

### 3.4. Алгоритм сильного отслеживающего ансцентного фильтра

Алгоритм фильтра *STUKF* аналогичен алгоритму *UKF* со следующими изменениями. Во первых, в *STUKF* вводится коэффициент  $\lambda_k$ :

$$\lambda_{i,k} = \frac{\text{tr}[\eta V_k - \beta R_k]}{\text{tr}[P_{z_k}]} = \begin{cases} \lambda_{i,k}, & \lambda_{i,k} > 1 \\ 1, & \lambda_{i,k} \leq 1 \end{cases}.$$

Во вторых, ковариационную матрицу необходимо обновить следующим образом. Новые значения  $P_{x_k}^-, P_{z_k}^-, P_{xz}$  нуждаются в модификации и могут быть получены путем умножения соотношений (1), (2) и (3) на коэффициент  $\lambda_k$ :

$$P_{x_k}^- = \lambda_k \left\{ \sum_{i=0}^{2L} w_i^{(c)} (\varsigma_{i,k|k-1}^- - \hat{x}_k^-) (\varsigma_{i,k|k-1}^- - \hat{x}_k^-)^T + Q_k \right\},$$

$$P_{z_k}^- = \lambda_k \left\{ \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\varsigma_{z_i,k|k-1}^- - \hat{z}_k^-) (\varsigma_{z_i,k|k-1}^- - \hat{z}_k^-)^T + R_k \right\},$$

$$P_{xz} = \lambda_k \left\{ \sum_{i=0}^{2n} W_i^{(c)} (\varsigma_{k|k-1}^- - \hat{x}_k^-) (\varsigma_{z_i,k|k-1}^- - \hat{z}_k^-)^T \right\},$$

$$\lambda_k = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m).$$

## 4. Сравнительный анализ точности оценки различными фильтрами

В качестве примера рассмотрим следующую нелинейную систему

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = f(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 0.05x_1(x_2 + x_3) \end{bmatrix} + w(t),$$

$$z = h(x) = x_1 + v(t).$$

На рис. 1 приведены результаты моделирования исследуемыми алгоритмами (*EKF*, *UKF*, *STUKF*) при следующих параметрах задачи:

$$x_0 = [0; 0; 1], P_0 = \text{diag}[1, 1, 1], Q = \text{diag}[0.01, 0.01], R = 0.0025.$$

Как следует из результатов моделирования, фильтр *STUKF* обладает хорошей способностью отслеживания состояния.

Для сравнения точности оценки указанных фильтров используется параметр среднеквадратическое отклонение (СКО)

$$\text{СКО} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \hat{x}_i)^2},$$

где  $\hat{x}_i$  – оценка состояния,  $x_i$  – его фактическое значение, а  $N$  – количество наблюдений.

В таблице 1 приведены значения СКО для фильтров *EKF*, *UKF* и *STUKF*. Фильтр *STUKF* дает наиболее хороший результат с точки зрения СКО.

Таблица 1. СКО точности оценки фильтров.

Фильтр	EKF	UKF	STUKF
СКО	0.028	0.037	0.018

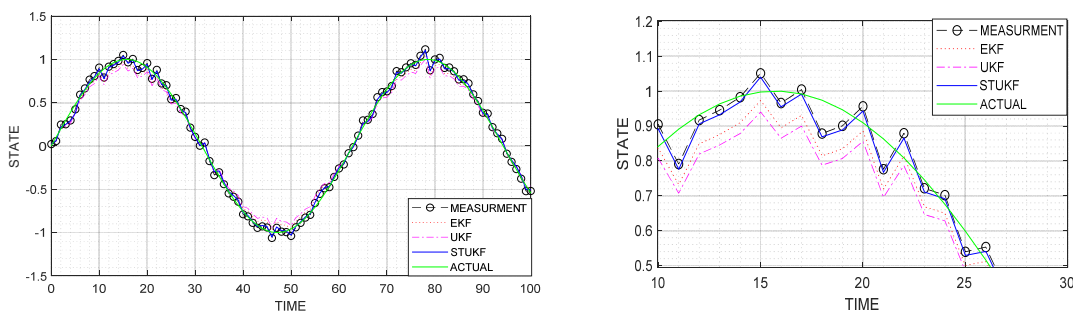


Рис. 1. Сравнительный анализ точности оценки фильтров.

## 5. Заключение

В статье изложены алгоритмы различных калмановских фильтров (*EKF*, *UKF*, *STKF* и их комбинации *STUKF*) для оценки состояния нелинейных систем. Использование одновременно фактора смягчения фильтра *STKF* и ансцентной трансформации фильтра *UKF* в фильтре *STUKF* обеспечивает повышение устойчивости работы фильтра. Результат моделирования установлено, что фильтр *STUKF* обладает хорошей гладкостью оценки и наибольшей точностью.

## Список литературы

1. Куликов Р.С. Сравнение точностей нелинейной фильтрации в расширенном фильтре Калмана и в ансцентном фильтре // Радиотехника. 2016. № 9. С. 135-140.
2. Кудрявцева И. А. Анализ эффективности расширенного фильтра Калмана, сигма-точечного фильтра Калмана и сигма-точечного фильтра частиц // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. 2016. № 224 (2). С. 43-51.
3. Merwe R.V.D. Sigma-point Kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models. Ph.D thesis. OGI school of science & engineering at Oregon Health & Science Uni. Apr. 2004.
4. Julier S.J., Uhlmann J.K. Unscented filtering and nonlinear estimation // Proc. of IEEE. 2004. No 3. P. 401-422.
5. Zhou H., Frank P. M. Strong tracking filtering of nonlinear time-varying stochastic systems with coloured noise. Application to parameter estimation and empirical robustness analysis // International Journal of Control. 1996. Vol. 65, No. 2. P. 295-307.
6. Yibo Feng, Xisheng Li, Xiaojuan Zhang. An Adaptive Compensation Algorithm for Temperature Drift of Micro-Electro-Mechanical Systems Gyroscopes Using a Strong Tracking Kalman Filter // Sensors. 2015. No 15. P. 11222-11238.
7. Gaoge Hu, Shesheng Gao, Yongmin Zhong, Bingbing Gao and Aleksandar Subic. Modified strong tracking unscented Kalman filter for nonlinear state estimation with process model uncertainty // Int. J. Adapt. Control and Signal Process. 2015. No. 29. P. 1561-1577.
8. Mundla Narasimhappa1, Samrat L. Sabat, Jagannath Nayak. Adaptive sampling strong tracking scaled unscented Kalman filter for denoising the fibre optic gyroscope drift signal // IET Sci. Meas. Technol. 2015. Vol. 9, No. 3. P. 241-249.
9. Jwo, D.J., Lai, S.Y. Navigation integration using the fuzzy strong tracking unscented Kalman // Journal of Navigation. 2009. Vol. 62. P. 303-322.