УДК 519.217

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ МАРКОВСКИ МОДУЛИРОВАННЫХ ПУАССОНОВСКИХ ПОТОКОВ

Г.А. Зверкина
Российский университет транспорта (МИИТ)
Россия, 127994, Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9
E-mail: zverkina@gmail.com

Ключевые слова: Марковски модулированные пуассоновские процессы, регенерирующие процессы, скорость сходимости.

Аннотация: Как известно, марковски модулированные пуассоновские процессы активно применяются в настоящее время в теории массового обслуживания, теории надёжности и в других областях, где исследуются потоки случайных событий. Марковски модулированный пуассоновский процесс – это пуассоновский процесс, интенсивность которого зависит от состояния некого марковского процесса в непрерывном времени. То есть это парный процесс, состоящий из двух компонент: модулирующего процесса X_t и зависящего от него пуассоновского процесса с интенсивностью $\lambda(X_t)$. Обычно модулирующим процессом является эргодическая цепь Маркова в непрерывном времени. В данной работе рассмотрена ситуация, когда модулирующим процессом является произвольный регенерирующий процесс, и от него может зависеть интенсивность не одного, а нескольких пуассоновских потоков. Определены уловия, когда можно оценить скорость сходимости марковски модулированного процесса (процессов) к стационарному распределению, и оценена скорость сходимости.

1. Введение

Рассматриваем многокомпонентный процесс, состоящий из модулирующего регенерирующего процесса X_t и конечного числа k пуассоновских потоков, интенсивность каждого из которых зависит от состояния X_t. Более того, будем счистать, что интенсивности всех пуассоновских потоков взаимозависимы. Т.е. интесивность i-го потока есть $\lambda_i(X_t; y_1(t), y_2(t) \dots, y_k(t))$, где $y_j(t)$ – время, прошедшее с момента последнего по времени события потока с номером j $(i, j \in \{1, 2, \dots k\}$.

В момент времени t состояние всего набора процессов (модулирующего и модулируемых) описывается вектором $\overrightarrow{Z}_t = \overrightarrow{(X;Y)}_t = (X_t; y_1(t), y_2(t) \dots, y_k(t))$, распределённого в пространстве состояний $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathbb{R}_+^k$, где $\mathcal{X}$ – пространство состояний процесса X_t.

Цель настоящей работы – предложить условия, при которых процесс $\overrightarrow{Z}_t$ эргодичен и оценить скорость сходимости этого процесса к стационарному распределению.

Дело в том, что процесс $\overrightarrow{Z}_t$ не является регенерирующим, и поэтому применение стандартных методов исследования регенерирующих процессов невозможно.

Кроме того, предельное распределение этого процесса в общем случае определить невозможно.

Однако такого рода процессы встречаются при исследовании систем и сетей массового обслуживания, а также в других прикладных задачах, где важно знать и предельное распределение, и время, когда в расчётах можно заменить им допредельное распределение.

Знание оценки скорости сходимости распределения процесса $\overrightarrow{(X;Y)}_t$ к стационарному распределению позволяет оценить стационарные характеристики описываемой им прикладной модели с заданной наперёд точностью – с помощью имитационного моделирования.

2. Основной результат

Напомним, что случайный процесс $\{W_t,\, t \geqslant 0\}$, определённый на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, измеримый по фильтрации $\{\mathcal{F}_t,\, t \geqslant 0\}$, с пространством состояний $(\mathcal{W}, \mathcal{B}(\mathcal{W}))$, называется *регенерирующим*, если существует последовательность марковских моментов (моментов остановки) $\{\theta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ относительно фильтрации $\mathcal{F}_t$ такая, что:

1. $W_{\theta_i} = W_{\theta_j}$ для всех $i, j \in \mathbb{N}$;

2. Случайные элементы $\Xi_i \stackrel{\text{def}}{=} \{W_t,\, t \in [\theta_i, \theta_{i+1}]\}$ $(i \in \mathbb{N})$ одинаково распределены и независимы.

Точки $\{\theta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ образуют вложенный процесс восстановления для процесса X_t.

Обозначим $\zeta_i \stackrel{\text{def}}{=} (\theta_{i+1} - \theta_i)$ – длина i-го периода регенерации.

Предположения.

1. Случайные величины ζ_i абсолютно непрерывны и $\mathbf{P}\{\zeta_i \leqslant s\} = \Phi(s)$; обозначим $\phi(s) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\Phi'(s)}{1-\Phi(s)}$.

1а. Существует $K > 2$ такое, что для всех $s \geqslant 0$ верно неравенство $\phi(s) \geqslant \dfrac{K}{1+s}$.

1б. Существуют такие положительные μ и M такие, что для всех $s \geqslant 0$ верно неравенство $\mu \leqslant \phi(s) \leqslant \mathrm{M}$.

2. Существуют такие положительные λ_0 и Λ такие, что для всех $s \geqslant 0$ верны неравенства $\lambda_0 \leqslant \lambda_i(\overrightarrow{Z}_t) \leqslant \Lambda$.

Лемма 1.

I. Если выполнены условия 1а и 2, то процесс $\overrightarrow{Z}_t$ эргодический и скорость сходимости числовых характеристик этого процесса к стационарным значениям полиномиальна.

II. Если выполнены условия 1б и 2, то процесс $\overrightarrow{Z}_t$ эргодический и скорость сходимости числовых характеристик этого процесса к стационарным значениям экспоненциальна.

Доказательство Леммы 1 опирается на теорему Дуба, использующую условия Дёблина-Дуба (см. ([1, Глава 6, §2])), а также на их модификацию.

Обозначим $\mathcal{P}_t(S) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{P}\{\overrightarrow{Z}_t \in S\}$, $S \subseteq \mathcal{Z}$ – распределение процесса $\overrightarrow{Z}_t$ в момент времени t.

Обозначим $\mathcal{P}(S) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{t\to+\infty} \mathcal{P}_t(S)$, $S \subseteq \mathcal{Z}$ – стационарное распределение процесса $\overrightarrow{Z}_t$.

Напомним, что расстоянием между двумя мерами ν_1 и ν_2 на одном измеримом пространстве $(\mathcal{W}, \mathcal{B}(\mathcal{W}))$ в метрике полной вариации называется

$$\|\nu_1 - \nu_2\|_{\text{ПВ}} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{S\in\mathcal{B}(\mathcal{W})} |\nu_1(S) - \nu_2(S)|.$$

Теорема 1. *Пусть момент $t = 0$ – момент регенерации процесса X_t.*

I. Если выполнены условия 1а и 2, то для любого $K_1 < (K - 1)$ найдётся такая вычислимая постоянная $C(K_1)$, что для всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\|\mathcal{P}_t - \mathcal{P}\|_{\text{ПВ}} \leqslant \frac{C(K_1)}{(1+t)^{K_1}}.$$

II. Если выполнены условия 1б и 2, то можно вычислить такое положительное число $\alpha < \min\{\lambda_0, \mu\}$, что для всех $\alpha_1 < \alpha$ найдётся такая вычислимая постоянная $C(\alpha_1)$, что для всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\|\mathcal{P}_t - \mathcal{P}\|_{\text{ПВ}} \leqslant C(\alpha_1)e^{-\alpha_1 t}.$$

Доказательство Теоремы 1 заключается в вычислении величин α и $C(\cdot)$.

Для этого используется метод склеивания (см., например, [3] или [4]), а точнее, конструирование успешной склейки двух процессов с переходными вероятностями процесса $\overrightarrow{Z}_t$, но с разными начальными состояниями (об успешной склейке см. [2]).

Для этого применяются подходы, используемые в работах [5–7].

При этом оценки, используемые при вычислении величин α и $C(\cdot)$, достаточно грубы. Они учитывают только условия 1а, 1б и 2.

Если использовать свойства распределений, используемых в реальных технических системах, эти оценки могут быть существенно улучшены.

Также улучшение оценок может быть сделано с помощью численных методов: при вычислении постоянных $C(\cdot)$ используются оценки сумм сходящихся достаточно быстро рядов. Их суммы могут быть достаточно точно оценены численно, хотя точных формул для этих выражений нет.

3. Заключение

Представленные результаты позволяют пусть и грубо, но оценить скорость сходимости распределения состояния марковски модулированного процесса к стационарному распределению. При этом под состоянием процесса понимается состояние модулирующего регенерирующего процесса и всех времён, прошедших с момента последнего события каждого из модулируемых потоков.

Соответственно, характеристики группы процессов $\overrightarrow{Z}_t$ зависят от этих величин и могут быть вычислены как функции от распределения процесса.

Это позволяет оценивать скорость сходимости числовых характеристик к их стационарным значениям.

Поскольку многие системы массового обслуживания и сложные системы надёжности со взаимозависимыми восстанавливаемыми элементами могут быть описаны с помощью марковски модулированных пуассоновских потоков, полученные результаты могут быть использованы для того, чтобы опрделить тот момент времени, когда в расчёте характеристик исследуемой системы можно заменять сложно вычисляемые переменные параметры системы на их стационарные значения.

Кроме того, предложенные оценки скорости сходимости позволяют вычислять параметры системы с помощью имимтационного моделирования – с любой заданной наперёд точностью.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-01-00633а).

Список литературы

1. Дуб Дж.Л. Вероятностные процессы. М.: Издательство Иностранной литературы. Редакция литературы по математическим наукам, 1956.
2. Griffeath D. A maximal coupling for Markov chains // Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete. 1975. Vol. 31, No. 2, P. 95-106.
3. Thorisson H. Coupling, Stationarity, и Regeneration. Springer, 2000.
4. Thorisson H. Coupling Methods in Probability Theory // Scandinavian Journal of Statistics. 1995. Vol. 22, No. 2. P. 159-182.
5. Зверкина Г.А. Об экспоненциальной скорости сходимости распределения одной нерегенерирующей системы надёжности // Фундаментальная и прикладная математика. 2019 (в печати). https://arxiv.org/abs/1808.09912
6. Zverkina G. On strong bounds of rate of convergence for regenerative processes // Communications in Computer and Information Science. 2016. Vol 678. P. 381-393.
7. Zverkina G. Lorden's inequality and coupling method for backward renewal process // Материалы 20-й Международной научной конференции «Распределенные компьютерные и телекоммуникационные сети: управление, вычисление, связь» (DCCN-2017, Москва). М.: Техносфера, 2017. С. 484-491.