УДК 519.246.2: 681.518.22

ОПТИМАЛЬНЫЙ РЕКУРРЕНТНЫЙ ЛОГИКО-ДИНАМИЧЕСКИЙ ФИЛЬТР БОЛЬШОГО ПОРЯДКА, КРАТНОГО РАЗМЕРНОСТИ ВЕКТОРА ОЦЕНКИ

Е.А. Руденко
Московский авиационный институт (*национальный исследовательский университет*)
Россия, 125871, Москва, Волоколамское ш., 4
E-mail: rudenkoevg@yandex.ru

Ключевые слова: переключательная система наблюдения, смешанная марковская последовательность, неточные измерения, оптимальная нелинейная фильтрация.

Аннотация: рассматривается задача оценивания текущего состояния и режима работы дискретного стохастического динамического переключательного объекта управления по результатам неточных или неполных измерений. Для создания алгоритма оценивания, реализуемого в темпе со временем на вычислителе ограниченной мощности, предлагается способ синтеза нового конечномерного фильтра. Вектор его состояния составляется из нескольких последних векторов оценки, а текущая оценка ищется в виде оптимальной по точности зависимости от последнего измерения и предыдущего состояния фильтра.

1. Введение

Оптимальное управление стохастическими логико-динамическими системами (многорежимными, переключательными, со случайной структурой) по их измеряемым выходам требует оперативного, в реальном масштабе времени, распознавания текущего режима работы и оценивания внутрирежимного состояния этих систем. Но применение для этого бесконечномерного *абсолютно-оптимального фильтра* (АОФ) [1-3] сопряжено с существенными вычислительными трудностями, а конечномерный условно-оптимальный фильтр [4] является параметрическим и имеет небольшой фиксированный порядок (размерность вектора состояния), что препятствует получению им значительной точности. Потенциальная точность конечномерных непараметрических *фильтров оптимальной структуры* (ФОС) также ограничена, ибо они имеют или бесконечное время памяти и малый порядок, равный порядку объекта наблюдения [5-7], или любой порядок, кратный размерности вектора измерений, но конечную памяти [8].

В настоящей работе предлагается способ преодоления этой ограниченности логико-динамичес оцениваемого вектора состояния системы наблюдения. Время памяти ФБП бесконечно, а противоречие между его точностью и сложностью регулируется выбором величины кратности. Нахождение структурных функций ФБП выполняется до начала процесса оценивания с помощью интегральных операций с плотностями вероятности, что можно реализовать численно методом Монте-Карло с построением гистограмм искомых функций.

2. Постановка задачи синтеза фильтра

Рассмотрим функционирующий в условиях неопределенности многорежимный объект, случайное поведение которого в каждый момент дискретного времени $k=\overline{0,K}$ с конечным горизонтом K определяется одним из L целочисленных номеров его режима (структуры) $I_k \in \{\overline{1,L}\}$ и вектором абсолютно непрерывных континуальных переменных его состояния $X_k \in \mathrm{R}^{n_x}$. Пусть изменение во времени расширенного вектора состояния объекта $\overline{X}_k=[I_k\ X_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ описывается следующей системой уравнений

$$\overline{X}_{k+1} \equiv \begin{bmatrix} I_{k+1} \\ X_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_k^{(I_k)}(X_k, V_k^{\square}) \\ a_k^{(I_k)}(X_k, V_k) \end{bmatrix} \equiv \overline{a}_k(\overline{X}_k, \overline{V}_k),\ \overline{X}_0 \equiv \begin{bmatrix} I_0 \\ X_0 \end{bmatrix} \sim p_0(i,x) \equiv p_0(\overline{x}). \tag{1}$$

Здесь $\phi_k^{(i)}(x,v^{\square}) \equiv \phi_k(i,x,v^{\square})$, $a_k^{(i)}(x,v) \equiv a_k(i,x,v)$ – известные скалярная и векторная функции логического и динамического блоков объекта соответственно, $\overline{V}_k=(V_k^{\square},V_k)$ – вектор дискретных белых возмущений этих блоков. Эти возмущения не зависят от начального состояния объекта (I_0,X_0), который определяется своим совместным распределением $p_0(i,x)=P_0^{(i)}p_0^{(i)}(x)$, где $P_0^{(i)}=\Pr[I_0=i]$ – вероятность номера режима I_0, $p_0^{(i)}(x)=p_0(x\,|\,I_0=i)$ – условная плотность вероятности вектора состояния X_0.

Пусть также для уточнения текущего состояния $\overline{X}_k$ фиксируется расширенный вектор наблюдений $\overline{Y}_k=[J_k\ Y_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, состоящий из целочисленной переменной индикации режима $J_k \in \{\overline{1,M}\}$ и вектора $Y_k \in \mathrm{R}^{n_y}$ абсолютно непрерывных континуальных измерений, причем их значения определяются по формулам

$$\overline{Y}_k \equiv \begin{bmatrix} J_k \\ Y_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o_k^{(I_k)}(X_k, W_k^{\square}) \\ b_k^{(I_k)}(X_k, W_k) \end{bmatrix} \equiv \overline{b}_k(\overline{X}_k, \overline{W}_k). \tag{2}$$

Здесь $o_k^{(i)}(x,w^{\square})$, $b_k^{(i)}(x,w)$ – известные функции блоков измерителя, $\overline{W}_k=(W_k^{\square},W_k)$ – вектор дискретных белых погрешностей измерений, не зависящий ни от $\overline{X}_0$, ни от $\overline{V}_k$.

Априорное вероятностное поведение системы наблюдения (1), (2) полностью описывается определяемым по ее уравнениям и законам распределения белых шумов $\overline{V}_k$, $\overline{W}_k$ условным распределением $\alpha_k(i_{k+1},x_{k+1}\,|\,i_k,x_k)$ перехода от старого состояния $\overline{X}_k$ к новому $\overline{X}_{k+1}$ и условным распределением $\beta_k(j_k,y_k\,|\,i_k,x_k)$ измерения $\overline{Y}_k$ [5–8].

Требуется, с целью увеличения точности легко реализуемого в реальном времени логико-динамического *ФОС малого порядка* (ФМП) [5–7], найти оптимальную оценку $\hat{\overline{X}}_k=[\hat{I}_k\ \hat{X}_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ состояния $\overline{X}_k=[I_k\ X_k^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ как функцию последнего измерения $\overline{Y}_k$ и не более чем $l \in \mathrm{N}$ предыдущих оценок

$$\hat{\overline{X}}_k=\overline{g}_k(\overline{Y}_k,\hat{\overline{X}}_{\max(0,k-l)}^{k-1}),\ k \ge 1,\ \hat{\overline{X}}_0=\overline{g}_0(\overline{Y}_0). \tag{3}$$

Условием ее оптимальности является минимум среднего значения функции потерь от неточного распознавания и оценивания, например, аддитивной квадратично-простой

$$\mathrm{M}\left[(X_k-\hat{X}_k)^{\mathrm{T}}C_k(X_k-\hat{X}_k)+(1-\delta_{I_k,\hat{I}_k})\right] \to \min_{\overline{g}_k(\cdot)},\quad k \ge 0, \tag{4}$$

где M – оператор математического ожидания, $C_k=C_k^{\mathrm{T}}>0$ – матрица весовых коэффициентов, $\delta_{i,l}$ – символ Кронекера.

В отличие от *фильтра с конечной памятью* (ФКП) [8] старые измерения в (3) не забываются, они аккумулируются в оценках, поэтому время памяти ФБП как динамической системы бесконечно. При этом ФМП является частным случаем ФБП при $l=1$.

3. Рекуррентность и порядок предлагаемого фильтра

Соберем l последних оценок в вектор растущей, вначале, размерности

$$\bar{Z}_k = \hat{\bar{X}}^k_{\max(0,k-l+1)} = \begin{cases} \hat{\bar{X}}^k_0, \; k = 0..(l-1) \text{ (этап накопления)}, \\ \hat{\bar{X}}^k_{k-l+1}, \; k \ge l \text{ (этап обновления)}. \end{cases}$$

Тогда искомое соотношение (3) принимает вид

$$\hat{\bar{X}}_k = \begin{bmatrix} \hat{I}_k \\ \hat{X}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \iota_k(\bar{Y}_k, \bar{Z}_{k-1}) \\ g_k(\bar{Y}_k, \bar{Z}_{k-1}) \end{bmatrix} = \bar{g}_k(\bar{Y}_k, \bar{Z}_{k-1}), \; k \ge 1, \; \hat{\bar{X}}_0 = \begin{bmatrix} \hat{I}_0 \\ \hat{X}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \iota_0(\bar{Y}_0) \\ g_0(\bar{Y}_0) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

а заполнение вектора учитываемых оценок $\bar{Z}_k$ можно записать рекуррентно

$$\bar{Z}_k = \bar{f}_k(\hat{\bar{X}}_k, \bar{Z}_{k-1}), \quad k \ge 1, \quad \bar{Z}_0 = \hat{\bar{X}}_0. \tag{6}$$

Действительно, выделяя в $\bar{Z}_k$ целочисленную $N_k = \hat{I}^k_{\max(0,k-l+1)}$ и континуальную $Z_k = \hat{X}^k_{\max(0,k-l+1)}$ компоненты, имеем

$$\bar{Z}_k = \begin{bmatrix} N_k \\ Z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_k(\hat{I}_k, N_{k-1}) \\ f_k(\hat{X}_k, Z_{k-1}) \end{bmatrix} = \bar{f}_k(\hat{\bar{X}}_k, \bar{Z}_{k-1}), \quad k \ge 1,$$

где $\varphi_k(\cdot)$, $f_k(\cdot)$ – следующие вектор-функции накопления-обновления этих компонент

$$\varphi_k(\hat{i}_k, n_{k-1}) = \begin{cases} [\hat{i}_k \quad n^{\mathrm{T}}_{k-1}]^{\mathrm{T}}, & k = 1..(l-1), \\ [\hat{i}_k \quad (C_u\, n_{k-1})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, & k \ge l, \end{cases} \quad C_n = [E_{l-1} \; O_{(l-1)\times 1}],$$

$$f_k(\hat{x}_k, z_{k-1}) = \begin{cases} [\hat{x}^{\mathrm{T}}_k \quad z^{\mathrm{T}}_{k-1}]^{\mathrm{T}}, & k = 1..(l-1), \\ [\hat{x}^{\mathrm{T}}_k \quad (C_z\, z_{k-1})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, & k \ge l, \end{cases} \quad C_z = \left[E_{(l-1)n_x} \quad O_{(l-1)n_x \times n_x} \right].$$

Здесь C_n, C_z – матрицы удаления из векторов N_{k-1} и Z_{k-1} их последних, устаревших, блоков $\hat{I}_{k-l}$ и $\hat{X}_{k-l}$ соответственно, E, O – единичная и нулевая матрицы.

В результате разностный вид уравнений (6) позволяет называть $\bar{Z}_k$ вектором состояния этого рекуррентного фильтра, его размерность (порядок фильтра) не превосходит величины $p = l(n_x + 1)$, функции уравнения его состояния фиксированы, а оптимизации по критерию (4) подлежат только функции $\iota_k(\cdot)$, $g_k(\cdot)$ формулы его выхода (5).

Отметим, что уравнения ФБП (5), (6) отличаются от уравнений ФКП [8] только наполнением вектора состояния: $\bar{Z}^{\text{ФБП}}_k = \hat{\bar{X}}^k_{\max(0,k-l+1)}$, тогда как $\bar{Z}^{\text{ФКП}}_k = \bar{Y}^k_{\max(0,k-l+1)}$.

4. Оптимизация функций выхода фильтра

Подставляя формулы для оценок (5) в критерий (4), известным образом [8] получаем следующие оптимали

$$\iota_k(\bar{z}_k^*) \in \operatorname{Arg}\max_{i=1..L} \mathrm{P}_k^{(i)}(\bar{z}_k^*), \;\; g_k(\bar{z}_k^*) = \sum_{i=1}^{L} \mathrm{P}_k^{(i)}(\bar{z}_k^*) \int x\, \rho_k^{(i)}(x \mid \bar{z}_k^*)\, dx \;,\;\; k \geq 1 \,. \tag{7}$$

Здесь и далее все интегралы являются определенными и берутся по всему евклидову пространству соответствующей размерности, $\bar{z}_k^* = (\bar{y}_k, \bar{z}_{k-1})$ – объединенный аргумент, $\mathrm{P}_k^{(i)}(\bar{z}_k^*)$ – условная вероятность i-го режима, $\rho_k^{(i)}(\cdot)$ – условная плотность вероятности состояния X_k при истинности i-го режима. Последние выражаются через условное распределение $\rho_k(\bar{x}_k \mid \bar{y}_k, \bar{z}_{k-1})$ расширенного вектора состояния $\bar{X}_k$ объекта (1)

$$\mathrm{P}_k^{(i)}(\bar{y}_k, \bar{z}_{k-1}) = \Pr\left[I_k = i \mid \bar{Y}_k = \bar{y}_k, \bar{Z}_{k-1} = \bar{z}_{k-1} \right] = \int \rho_k(i, x_k \mid \bar{y}_k, \bar{z}_{k-1})\, dx_k \,,$$

$$\rho_k^{(i)}(x_k \mid \bar{y}_k, \bar{z}_{k-1}) = \rho_k(i, x_k \mid \bar{y}_k, \bar{z}_{k-1}) \big/ \mathrm{P}_k^{(i)}(\bar{y}_k, \bar{z}_{k-1}) \,.$$

Таким образом, задача сведена к определению условного распределения вероятности $\rho_k(\cdot)$. При этом начальные функции $\iota_0(\cdot)$, $g_0(\cdot)$ и соответствующие им оценки $\hat{I}_0, \hat{X}_0$ совпадают с абсолютно-оптимальными [1,2,7].

5. Нахождение условного распределения

Используя формулу Байеса, а также свойства марковости объекта (1) и измерителя (2), аналогично [8] можно получить следующие выражения. Условное распределение $\rho_k(\cdot)$ выражается через совместное распределение $q_{k-1}(\cdot)$ по формулам

$$\rho_k(i, x \mid j_k, y_k, \bar{z}_{k-1}) = \beta_k(j_k, y_k \mid i, x)\, \pi_k(i, x \mid \bar{z}_{k-1}) \Big/ \sum_{i=1}^{L} \int numerator\; dx \,,\;\; k \geq 1 \,,$$

$$\pi_{k+1}(i_{k+1}, x_{k+1} \mid \bar{z}_k) = \sum_{i_k=1}^{L} \int \alpha_k(i_{k+1}, x_{k+1} \mid i_k, x_k) \frac{q_k(i_k, x_k, \bar{z}_k)}{\sum_{i_k=1}^{L} \int numerator\; dx_k}\, dx_k \,,\;\; k \geq 0 \,,$$

а $q_k(\cdot)$ находится рекуррентно с ними, используя уже полученные по $\rho_k(\cdot)$ функции (7). Сначала, по известным $\iota_0(\cdot)$, $g_0(\cdot)$, вычисляются вспомогательные распределения

$$r_1(i_1, x_1 \mid j_0, y_0) = \sum_{i_0=1}^{L} \int \alpha_0(i_1, x_1 \mid i_0, x_0)\, \beta_0(j_0, y_0 \mid i_0, x_0)\, p_0(i_0, x_0)\, dx_0 \,,$$

$$p_1(i_1, x_1, \hat{i}_0, \hat{x}_0) = \sum_{j_0=1}^{M} \int \delta_{\hat{i}_0,\, \iota_0(j_0, y_0)}\, \delta[\hat{x}_0 - g_0(j_0, y_0)]\, r_1(i_1, x_1 \mid j_0, y_0)\, dy_0 \,.$$

После, на этапе накопления оценок, при $k = 1..(l-1)$, отыскиваются $q_1(\cdot)$, …, $q_{l-1}(\cdot)$:

$$q_k(i_k, x_k, \hat{\bar{x}}_0^k) = p_k(i_k, x_k, \hat{\bar{x}}_0^{k-1}) \int \delta[\hat{\bar{x}}_k - \bar{g}_k(\bar{y}_k, \hat{\bar{x}}_0^{k-1})]\, \beta_k(\bar{y}_k \mid i_k, x_k)\, d\bar{y}_k \,,$$

$$p_{k+1}(i_{k+1}, x_{k+1}, \bar{z}_k) = \sum_{i_k=1}^{L} \int \alpha_k(i_{k+1}, x_{k+1} \mid i_k, x_k)\, q_k(i_k, x_k, \bar{z}_k)\, dx_k \,, \quad k \geq 1 \,. \tag{8}$$

Здесь для компактности записи использованы следующие условные обозначения

$$\delta[\hat{\bar{x}}_k - \bar{g}_k(\cdot)] = \delta_{\hat{i}_k - \iota_k(\cdot)}\delta[\hat{x}_k - g_k(\cdot)]\,,\ \int f(\bar{y}_k)\,d\bar{y}_k = \sum_{j_k=1}^{M}\int f(j_k, y_k)\,dy_k\,.$$

Затем, на последующем этапе обновления оценок, при $k \geq l$, еще $q_l(\cdot)$, $q_{l+1}(\cdot)$ и т.д.:

$$q_k(\bar{x}_k, \hat{\bar{x}}_{k-l+1}^k) = \iint \delta[\hat{\bar{x}}_k - \bar{g}_k(\bar{y}_k, \hat{\bar{x}}_{k-l}^{k-1})]\,\beta_k(\bar{y}_k \mid \bar{x}_k)\,p_k(\bar{x}_k, \hat{\bar{x}}_{k-l}^{k-1})\,d\bar{y}_k d\hat{\bar{x}}_{k-l}\,,$$

где также используется общая формула (8), а «интегрирование» по $\hat{\bar{x}}_{k-l}$ соответствует удалению из вектора $\bar{Z}_{k-1} = \hat{\bar{X}}_{k-l}^{k-1}$ его «старого» блока $\hat{\bar{X}}_{k-l}$, что отражает процесс потери информации о самых старых оценках.

6. Заключение

Полученные интегральные соотношения можно реализовать численно методом Монте-Карло, когда последовательное нахождение вероятностных распределений заменяется потактовым статистическим моделированием уравнений объекта (1), измерителя (2) и фильтра (3) [7,8]. Его целью является получения больших пакетов реализаций случайных величин $\{\bar{X}_k\}$, $\{\bar{Y}_k\}$, $\{\bar{Z}_{k-1}\}$, позволяющих строить гистограммы оптимальных функций оценивания (7). Одновременно с этим анализируется и точность фильтра. Однако такая процедура синтеза ФБП довольно громоздка.

Поэтому в дальнейшем актуально построение различных численно-аналитических приближений к ФБП (линеаризованного, гауссовского, сигма-точечного и т.п.), подобных аналогичным приближениям к ФМП [6-8] и к ФКП [9], для чего и будут использованы найденные здесь соотношения. В этих приближениях вид структурных функций (7) находится уже аналитически, а их параметры тоже вычисляются методом Монте-Карло, но уже гораздо проще, лишь по выборочным значениям двух первых моментов континуальных переменных X_k, Z_k и по совместной вероятности целочисленных переменных I_k, N_k. Подчеркнем, что все эти вычисления можно произвести заранее, до начала самого процесса оценивания.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-08-00128-а).

Список литературы

1. Немура А., Клекис Э. Оценивание параметров и состояния систем со скачкообразно меняющимися свойствами. Вильнюс: Мокслас, 1988.
2. Бухалев В.А. Распознавание, оценивание и управление в системах со случайной скачкообразной структурой. М.: Наука, 1996.
3. Bain A., Crisan D. Fundamentals of Stochastic Filtering. New York: Springer, 2009.
4. Босов А.В., Панков А.Р. Условно-минимаксная фильтрация в системе с переключающимися каналами наблюдения // Автоматика и телемеханика. 1995. № 6. С. 87-97.
5. Руденко Е.А. Оптимальный дискретный логико-динамический нелинейный фильтр-предиктор // Изв. РАН. ТиСУ. 2013. № 3. С. 28-38.
6. Руденко Е.А. Численно-аналитические приближения к оптимальному рекуррентному логико-динамическому фильтру-предиктору малого порядка // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. № 5. С. 24-47.
7. Руденко Е.А. Конечномерные рекуррентные алгоритмы оптимальной логико-динамической фильтрации // Изв. РАН. ТиСУ. 2016. № 1. С. 43-65.
8. Руденко Е.А. Оптимальный рекуррентный логико-динамический фильтр с конечной памятью // Изв. РАН. ТиСУ. 2017. № 4. С. 56-64.

9. Руденко Е.А. Оптимальный дискретный логико-динамический фильтр-предиктор с конечной памятью // Тр. XI Межд. Четаевской конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление». Т. 3. Секция 3. Управление. Ч. III. Казань, 13–17 июня 2017 г. Казань: КНИТУ-КАИ, 2017. С. 221-231.