УДК 514.852

О РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ДЛЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

К.А. Рыбаков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4

E-mail: rkoffice@mail.ru

Ключевые слова: обратная задача, динамическая система, детерминированная система, стохастическая система, интегральное многообразие.

Аннотация: В работе предлагается методика построения системы дифференциальных уравнений по заданному набору первых интегралов. Методика основана на нахождении базиса линейного подпространства, ортогонального градиентам функций, задающих первые интегралы.

1. Обратная задача динамики

Пусть процесс $x(t)$ описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

(1) $$\dot{x}(t) = a\big(t, x(t)\big)dt, \quad x(t_0) = x_0,$$

либо системой стохастических дифференциальных уравнений в форме Стратоновича

(2) $$dx(t) = a\big(t, x(t)\big)dt + \sigma\big(t, x(t)\big) \circ dw(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — n-мерный вектор, $n > 1$; $t \in \mathrm{T} = [t_0, T]$ — время; $a(t, x) \colon \mathrm{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — n-мерная вектор-функция; $\sigma(t, x) \colon \mathrm{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times s}$ — $(n \times s)$-мерная матричная функция; $w(t)$ — s-мерный стандартный винеровский процесс, $w(t)$ и начальный вектор состояния $x_0 \in \mathbb{R}^n$ независимы. Функции $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ удовлетворяют условиям существования и единственности решения соответствующих дифференциальных уравнений.

При определенных условиях для процесса $x(t)$ выполняется соотношение

(3) $$M\big(t, x(t)\big) = M(t_0, x_0) = \mathrm{const},$$

которое при описании процесса $x(t)$ уравнением (2) понимается с вероятностью 1.

Функция $M(t, x) \colon \mathrm{T} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $p < n$, задает набор первых интегралов системы уравнений (1) или (2) и определяет ее $(n - p)$-мерное интегральное многообразие [2–4, 7, 8].

Условия, при выполнении которых справедливо соотношение (3), записываются в виде

$$(4)\qquad \frac{\partial M_k(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\frac{\partial M_k(t,x)}{\partial x_i} = 0,$$

$$(5)\qquad \sum_{i=1}^{n} \sigma_{il}(t,x)\frac{\partial M_k(t,x)}{\partial x_i} = 0, \quad l = 1,2,\ldots,s,$$

в предположении $M_k(t,x) \in C^{1,1}(\mathrm{T} \times \mathbb{R}^n)$, где $k = 1,2,\ldots,p$; $a_i(t,x)$ и $\sigma_{il}(t,x)$ — координаты вектор-функции $a(t,x)$ и элементы матричной функции $\sigma(t,x)$ соответственно ($i = 1,2,\ldots,n$ и $l = 1,2,\ldots,s$).

Если $x(t)$ — детерминированная функция, удовлетворяющая уравнению (1), то должно выполняться условие (4), а если $x(t)$ — случайный процесс, который является решением уравнения (2), то должны выполняться оба условия (4) и (5).

Объем статьи не позволяет рассмотреть общий случай, поэтому ограничимся вариантом $M(t,x) = M(x)$ и запишем условия (4) и (5) в виде

$$(6)\qquad \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)\frac{\partial M_k(x)}{\partial x_i} = 0,$$

$$(7)\qquad \sum_{i=1}^{n} \sigma_{il}(t,x)\frac{\partial M_k(x)}{\partial x_i} = 0, \quad l = 1,2,\ldots,s.$$

Условия (6) и (7) имеют следующий геометрический смысл — это условия ортогональности вектор-функции $a(t,x)$, а также каждого столбца матрицы $\sigma(t,x)$ градиентам $\nabla M_k(x)$ в $\mathbb{R}^n$ $\forall t \in \mathrm{T}$, $k = 1,2,\ldots,p$.

Обратная задача динамики состоит в построении дифференциального уравнения динамической системы вида (1) или (2) по набору первых интегралов, т.е. по функции $M(x)$ (в общем случае по функции $M(t,x)$).

2. Построение уравнений системы по заданному набору первых интегралов

При построении системы обыкновенных дифференциальных уравнений по заданному набору первых интегралов функция $a(t,x)$ должна быть ортогональна градиентам $\nabla M_k(x)$ в $\mathbb{R}^n$ $\forall t \in \mathrm{T}$, $k = 1,2,\ldots,p$. Это условие можно записать в виде

$$a(t,x) = \mu(t,x)\big[\,\nabla M_1(x), \nabla M_2(x), \ldots, \nabla M_p(x),\\ F_1(t,x), F_2(t,x), \ldots, F_{n-p-1}(t,x)\,\big],$$

где в правой части векторное произведение $n-1$ вектора в $\mathbb{R}^n$ [8], $\mu(t,x)$ — произвольная скалярная функция, а $F_j(t,x)$, $j = 1,2,\ldots,n-p-1$, — произвольные n-мерные вектор-функции. Функции $F_j(t,x)$ определяют направление движения по интегральному многообразию, координаты этих функций можно выбирать, обеспечивая требуемые свойства динамической системы, например оптимальность в соответствии с дополнительно заданным критерием качества или устойчивость. Этот подход впоследствии был применен для построения систем стохастических дифференциальных уравнений по заданному набору первых интегралов [4–6]. В последнем случае таким же векторным произведением можно определять столбцы матрицы $\sigma(t,x)$.

Наличие такого числа произвольно задаваемых функций в каждом векторном произведении, а именно $\mu(t,x)$ и координат вектор-функции $F_1(t,x)$, $F_2(t,x)$, $\ldots$, $F_{n-p-1}(t,x)$, вообще говоря, избыточно за исключением случая $p=n-1$: этих параметров $(n-p-1)n+1$. Достаточно ограничиться набором $n-p$ произвольных функций и найти базис $(n-p)$-мерного линейного подпространства, ортогонального градиентам $\nabla M_k(x)$, $k=1,2,\ldots,p$.

Для построения системы обыкновенных дифференциальных уравнений по заданному набору первых интегралов можно решить систему линейных алгебраических уравнений [2,7], которая и является условием ортогональности функции $a(t,x)$ градиентам $\nabla M_k(x)$, и найти базис $\{N_1,N_2,\ldots,N_{n-p}\}$ линейного подпространства, ортогонального градиентам функций, задающих первые интегралы (для краткости зависимость базисных векторов и градиентов от x далее не указана). Этот же базис может использоваться для построения системы стохастических дифференциальных уравнений. Ниже предлагается методика формирования такого базиса, она обеспечивает достаточно простое построение систем обыкновенных или стохастических дифференциальных уравнений. Ее можно использовать в задачах анализа, синтеза и фильтрации в классе инвариантных динамических систем [1,2,4–6,9,10].

При $p=1$:

$$\begin{aligned} N_1 &= [\,h_1^1\ h_2^1\ \ 0\ \ldots\ 0\ \ 0\,]^{\mathrm{T}},\\ N_2 &= [\,0\ \ h_2^2\ h_3^2\ \ 0\ \ldots\ 0\,]^{\mathrm{T}},\\ &\ldots\\ N_{n-1} &= [\,0\ \ 0\ \ldots\ 0\ \ h_{n-1}^{n-1}\ h_n^{n-1}\,]^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

причем $N_1 \perp G$, $N_2 \perp G$, $\ldots$, $N_{n-1} \perp G$, где

$$G = [\,g_1\ g_2\ \ldots\ g_n\,]^{\mathrm{T}}, \quad g_i = \frac{\partial M(t,x)}{\partial x_i}, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Например,

$$\begin{aligned} N_1 &= [\,g_2\ \ -g_1\ \ 0\ \ldots\ 0\ \ 0\,]^{\mathrm{T}},\\ N_2 &= [\,0\ \ g_3\ \ -g_2\ \ 0\ \ldots\ 0\,]^{\mathrm{T}},\\ &\ldots\\ N_{n-1} &= [\,0\ \ 0\ \ldots\ 0\ \ g_n\ \ -g_{n-1}\,]^{\mathrm{T}}. \end{aligned}$$

При $p=2$:

$$\begin{aligned} N_1 &= [\,h_1^1\ h_2^1\ h_3^1\ \ 0\ \ldots\ 0\ \ 0\,]^{\mathrm{T}},\\ N_2 &= [\,0\ \ h_2^2\ h_3^2\ h_4^2\ \ 0\ \ldots\ 0\,]^{\mathrm{T}},\\ &\ldots\\ N_{n-2} &= [\,0\ \ldots\ 0\ \ h_{n-2}^{n-2}\ h_{n-1}^{n-2}\ h_n^{n-2}\,]^{\mathrm{T}}, \end{aligned}$$

причем $N_1 \perp G_k$, $N_2 \perp G_k$, $\ldots$, $N_{n-2} \perp G_k$, $k=1,2$, где

$$G_k = [\,g_1^k\ g_2^k\ \ldots\ g_n^k\,]^{\mathrm{T}}, \quad g_i^k = \frac{\partial M_k(t,x)}{\partial x_i}, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Например, трехмерные подвекторы N_1, N_2, ..., N_{n-2} можно найти как векторные произведения трехмерных подвекторов G_1 и G_2, т.е.

$$
\begin{aligned}
&[\,h_1^1\ h_2^1\ h_3^1\,]^{\mathrm{T}} = \big[[\,g_1^1\ g_2^1\ g_3^1\,]^{\mathrm{T}}, [\,g_1^2\ g_2^2\ g_3^2\,]^{\mathrm{T}}\big],\\
&[\,h_2^2\ h_3^2\ h_4^2\,]^{\mathrm{T}} = \big[[\,g_2^1\ g_3^1\ g_4^1\,]^{\mathrm{T}}, [\,g_2^2\ g_3^2\ g_4^2\,]^{\mathrm{T}}\big],\\
&\qquad\qquad \ldots\\
&[\,h_{n-2}^{n-2}\ h_{n-1}^{n-2}\ h_n^{n-2}\,]^{\mathrm{T}} = \big[[\,g_{n-2}^1\ g_{n-1}^1\ g_n^1\,]^{\mathrm{T}}, [\,g_{n-2}^2\ g_{n-1}^2\ g_n^2\,]^{\mathrm{T}}\big].
\end{aligned}
$$

При $p = 3$:

$$
\begin{aligned}
N_1 &= [\,h_1^1\ h_2^1\ h_3^1\ h_4^1\ \ 0\ \ldots\ 0\ \ 0\,]^{\mathrm{T}},\\
N_2 &= [\,0\ \ h_2^2\ h_3^2\ h_4^2\ h_5^2\ \ 0\ \ldots\ 0\,]^{\mathrm{T}},\\
&\qquad \ldots\\
N_{n-3} &= [\,0\ \ldots\ 0\ \ h_{n-3}^{n-3}\ h_{n-2}^{n-3}\ h_{n-1}^{n-3}\ h_n^{n-3}\,]^{\mathrm{T}},
\end{aligned}
$$

причем $N_1 \perp G_k$, $N_2 \perp G_k$, ..., $N_{n-2} \perp G_k$, $k = 1, 2, 3$, где

$$
G_k = [\,g_1^k\ g_2^k\ \ldots\ g_n^k\,]^{\mathrm{T}}, \quad g_i^k = \frac{\partial M_k(t,x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.
$$

Например, четырехмерные подвекторы N_1, N_2, ..., N_{n-3} можно найти как векторные произведения четырехмерных подвекторов G_1, G_2 и G_3, т.е.

$$
\begin{aligned}
&[\,h_1^1\ h_2^1\ h_3^1\ h_4^1\,]^{\mathrm{T}} = \big[[\,g_1^1\ g_2^1\ g_3^1\ g_4^1\,]^{\mathrm{T}}, [\,g_1^2\ g_2^2\ g_3^2\ g_4^2\,]^{\mathrm{T}}, [\,g_1^3\ g_2^3\ g_3^3\ g_4^3\,]^{\mathrm{T}}\big],\\
&[\,h_2^2\ h_3^2\ h_4^2\ h_5^2\,]^{\mathrm{T}} = \big[[\,g_2^1\ g_3^1\ g_4^1\ g_5^1\,]^{\mathrm{T}}, [\,g_2^2\ g_3^2\ g_4^2\ g_5^2\,]^{\mathrm{T}}, [\,g_2^3\ g_3^3\ g_4^3\ g_5^3\,]^{\mathrm{T}}\big],\\
&\qquad\qquad \ldots\\
&[\,h_{n-3}^{n-3}\ h_{n-2}^{n-3}\ h_{n-1}^{n-3}\ h_n^{n-3}\,]^{\mathrm{T}} =\\
&\qquad = \big[[\,g_{n-3}^1\ g_{n-2}^1\ g_{n-1}^1\ g_n^1\,]^{\mathrm{T}}, [\,g_{n-3}^2\ g_{n-2}^2\ g_{n-1}^2\ g_n^2\,]^{\mathrm{T}}, [\,g_{n-3}^2\ g_{n-2}^2\ g_{n-1}^2\ g_n^2\,]^{\mathrm{T}}\big].
\end{aligned}
$$

Аналогично можно найти базис линейного подпространства, ортогонального градиентам функций, задающих первые интегралы, при $p > 3$.

В качестве примера построим детерминированную и стохастическую систему с первым интегралом $(x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t))/2 = C$, т.е. $x = [\,x_1\ x_2\ x_3\,]^{\mathrm{T}}$, $n = 3$, $p = 1$, $M(t,x) = M(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/2$, $\nabla M(x) = [\,x_1\ \ x_2\ \ x_3\,]^{\mathrm{T}}$.

Определим два линейно независимых вектора, ортогональных градиенту $\nabla M(x)$, согласно изложенной выше методике: $N_1 = [\,x_2\ \ -x_1\ \ 0\,]^{\mathrm{T}}$, $N_2 = [\,0\ \ x_3\ \ -x_2\,]^{\mathrm{T}}$. Тогда вектор-функция $a(t,x)$, задающая уравнения (1), имеет вид $a(t,x) = q_1(t,x)N_1 + q_2(t,x)N_2$, где функции $q_1(t,x)$, $q_2(t,x)$ должны быть выбраны таким образом, чтобы выполнялись условия существования решения уравнения (1). Например, $q_1(t,x) = \cos t$, $q_2(t,x) = -1$, следовательно, $a(t,x) = [\,x_2 \cos t \quad -x_1 \cos t - x_3 \quad x_2\,]^{\mathrm{T}}$.

В результате получаем систему линейных дифференциальных уравнений:

$$
\dot{x}(t) = A(t)\,x(t), \quad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cos t & 0 \\ -\cos t & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},
$$

ее решение в фазовом пространстве принадлежит сфере $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/2 = C$, где C определяется начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Далее определим вектор-функцию $\sigma(t,x)$ из уравнения (2): $\sigma(t,x) = p_1(t,x)N_1 + p_2(t,x)N_2$, где функции $p_1(t,x)$, $p_2(t,x)$ должны быть выбраны таким образом, чтобы выполнялись условия существования решения уравнения (2) при $s = 1$. Например, зададим $p_1(t,x) = 0$, $p_2(t,x) = \mathrm{e}^{-t}$, т.е. $\sigma(t,x) = [\,0 \quad \mathrm{e}^{-t}x_3 \quad -\mathrm{e}^{-t}x_2\,]^{\mathrm{T}}$.

Таким образом, получаем систему линейных стохастических дифференциальных уравнений:

$$dx(t) = A(t)\,x(t)\,dt + S(t)\,x(t) \circ dw(t), \quad S(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{-t} \\ 0 & -\mathrm{e}^{-t} & 0 \end{bmatrix},$$

где матрица $A(t)$ определена выше, $w(t)$ — одномерный стандартный винеровский процесс. Решение этой системы в фазовом пространстве принадлежит сфере $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/2 = C$ с вероятностью 1, C определяется начальным условием $x(t_0) = x_0$.

В заключение отметим, во-первых, что предложенная методика также использует векторное произведение, однако для векторов меньшей размерности, чем размерность вектора состояния, и без произвольно задаваемых функций (такие функции используются как коэффициенты разложения вектор-функций и матричных функций в уравнениях (1) и (2): их $n-p$); во-вторых, в ряде случаев может потребоваться скорректировать методику, выбирая часть базиса иначе: например, если функция $M(t,x)$ при $p = 1$ не зависит от некоторых координат вектора x и соответствующие компоненты градиента тождественно равны нулю, то часть базиса образуют единичные n-мерные векторы. Для некоторых задач целесообразно перенумеровать координаты вектора x или другим образом выбирать подвекторы для G_k.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-08-00530а).

Список литературы

1. Аверина Т.А., Карачанская Е.В., Рыбаков К.А. Моделирование и анализ линейных инвариантных стохастических систем // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2018. № 1. С. 54-76.
2. Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. М.: Наука, 1986.
3. Дубко В.А. Интегральные инварианты для одного класса систем стохастических дифференциальных уравнений // Доклады АН УССР. Серия А. 1984. № 1. С. 18-21.
4. Дубко В.А. Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений. Владивосток: ДВО АН СССР, 1989.
5. Карачанская Е.В. Построение множества дифференциальных уравнений с заданным набором первых интегралов // Вестник ТОГУ. 2011. Т. 20. № 3 (22). С. 47-56.
6. Карачанская Е.В. Интегральные инварианты стохастических систем и программное управление с вероятностью 1. Хабаровск: Изд-во Тихоокеанского гос. ун-та, 2015.
7. Мухарлямов Р.Г. Построение множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданные интегралы // Дифференц. уравнения. 1967. Т. 3. № 2. С. 180-192.
8. Мухарлямов Р.Г. О построении дифференциальных уравнений оптимального движения по заданному многообразию // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7. № 10. С. 1825-1834.
9. Рыбаков К.А. Об оптимальном управлении при неполной информации диффузионно-скачкообразным процессом на многообразии // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Международная научно-техническая конференция. Воронеж, 12-15 сентября 2016 г.: Сб. тр. конф. Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2016. С. 401-402.
10. Рыбаков К.А. Об одном классе задач фильтрации на многообразиях // Информатика и ее применения. 2019 (принята к публикации).