УДК 681.516.74 : 681.5.015.44

ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЙ МЕТОД ОШИБКИ ПРОГНОЗА СОСТОЯНИЯ ДЛЯ АДАПТИВНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

И.В. Семушин

Ульяновский государственный университет

Россия, 432000, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42

E-mail: I.V.SemushinRF@ieee.org

Ключевые слова: адаптивное управление, активный принцип адаптации, наилучшая линейная аппроксимация, фильтр Калмана, параметрическая идентификация, физически-структурированное описание.

Аннотация: Данная работа демонстрирует метод и условия, при которых возможно строить инструментальный функционал качества идентификации оптимального фильтра Калмана (ОФК) в терминах различных линейных описаний системы для задач адаптивного стохастического управления в условиях априорной неопределенности. Решаются вопросы идентифицируемости ОФК с точностью *до невырожденного преобразования подобия* и возможности снятия этого ограничения по точности.

1. Введение

Цель параметрической идентификации данной реальной системы $\mathfrak{S}$ заключается в том, чтобы отыскать для нее наилучшую модель $\mathring{\mathfrak{M}} \triangleq \mathfrak{M}(\mathring{\theta})$ в некотором заранее выбранном классе моделей $\{\mathfrak{M} \triangleq \mathfrak{M}(\theta)\}$, характеризуемых параметром θ. Этот класс образуется тогда, когда θ пробегает возможные значения в заданном компактном множестве Θ вещественнозначного пространства: $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$. Важно знать, какой смысл вложен в термин *наилучшая модель*. Тем самым определяется принцип идентификации.

Классическим общепризнан принцип *Минимума ошибки предсказания* (Minimum Prediction Error, MPE) [1]. По умолчанию, с этим названием подразумевают ошибку предсказания выхода, т. е. реакции системы на управляющий вход. Вход $u(t)$ и выход $y(t)$ – единственно доступные данные, хотя для лучшего качества была бы предпочтительна подгонка адаптивной модели $\overline{\mathfrak{M}}(\theta)$ к системе $\mathfrak{S}$ по критерию близости друг другу не внешних реакций модели $\overline{\mathfrak{M}}(\theta)$ и системы $\mathfrak{S}$ на один и тот же вход, а их внутренних состояний. Это видно из фундаментальных определений: вводя понятие *динамическая система*, «нам нужно, конечно, потребовать, чтобы множество внутренних состояний системы $\mathfrak{S}$ было достаточно богатым для того, чтобы вместить всю информацию о предыстории системы $\mathfrak{S}$, необходимой для предсказания влияния прошлого на будущее» [2, с. 13].

В реальной, особенно, стохастической обстановке задач управления внутреннее состояние скрыто от практического доступа. Это подобно тому, как полезный сигнал скрыт на фоне помех в задачах фильтрации: в противном случае сама задача не стояла бы. С другой стороны, состояние – это математическая абстракция, узнаваемая с точностью до невырожденного (эквивалентного) преобразования подобия. Принцип MPE и связанные с ним методы исходят из этой предпосылки: ошибка предсказания *состояния* системы, в силу своей недоступности, не может быть рабочей, т. е. инструментальной мерой близости модели $\overline{\mathfrak{M}}(\theta)$ к системе $\mathfrak{S}$; она служит лишь задачам теоретического обоснования оптимальных алгоритмов оценивания будущих состояний, но не практическим целям идентификации этих оптимальных алгоритмов по активному (критериальному) принципу самообучения или адаптации. Термин АПА (*активный принцип адаптации*) [3] означает создание и применение практического инструмента в виде некоторого *вспомогательного функционала качества*, ВФК(θ), такого, что $\min_\theta$ ВФК(θ) влечет $\min_\theta$ ИФК(θ), где ИФК(θ) – *исходный функционал качества*, в типичном случае – ошибка предсказания *состояния* системы в среднеквадратической норме.

Методы, которые к этому не способны, могут быть трактованы как действующие по *пассивному принципу адаптации*. Так, *метод подпространств* [4] формальный упор на *состояние динамической системы* делает, но, линейно комбинируя прошлые входо-выходные данные и будущие входы для предсказания будущих *выходов*, минимизирует (в норме Фробениуса) ошибку предсказания все-таки выходов, а не внутреннего состояния системы.

Инструмент самооптимизации (т. е. активного типа действия) может существовать лишь как *вспомогательный* (косвенный) *функционал качества*, ВФК(θ), поскольку ИФК(θ) не доступен. Свойство двух функционалов – ИФК(θ) и ВФК(θ) – достигать своих экстремумов одновременно будем называть их *эквимодальностью* (по аналогии с термином *унимодальность* в теории методов оптимизации). Пример: два функционала качества будут эквимодальны, когда ВФК(θ) = ИФК(θ) + const_θ; это простейшая форма их связи, гарантирующая их эквимодальность.

Данная работа изучает метод и условия, при которых требуемый ВФК(θ) возможно строить для задач адаптивного стохастического управления в условиях априорной неопределенности параметров системы. Решаются вопросы: 1°. Каков наивысший уровень параметрической неопределенности, устранимой при $\min_\theta$ ВФК(θ) в исходном (физически-мотивированном) базисе переменных состояния; 2°. Как изменится этот уровень, если допускать идентификацию ОФК в стандартном наблюдаемом базисе; и 3°. Какие выгоды или осложнения может дать переход к мультисенсорной стандартной наблюдаемой модели (МСНМ) при работе по принципу $\min_\theta$ ВФК(θ).

2. Линейные аппроксимации (модели) системы $\mathfrak{S}$

2.1. Физически-структурированные модели $\mathfrak{S}(\mathring{\theta})$ и $\mathfrak{M}(\mathring{\theta})$

Рассмотрим класс линейных инвариантных во времени стохастических динамических систем управления $\mathfrak{S}(\theta)$ с двумя шумами в виде белых независимых случайных (гауссовых) последовательностей $\{w_t\}$ и $\{v_t\}$, не зависящих от случайного начального состояния $x_0(\theta) \in \mathbb{R}^n$. Вещественная величина $\theta \in \Theta$ является параметром размерности p в некотором компактном множестве $\Theta \in \mathbb{R}^p$.

Считаем, что $\mathfrak{S}(\theta)$ является полностью управляемой и полностью наблюдаемой системой при любом значении $\theta \in \Theta$, не исключая некоторого специфического значения $\mathring{\theta}$, которое называем «истинным», или «точным». Согласно современной точке зрения, для каждого конкретного экземпляра $\mathfrak{S}$ в классе $\mathfrak{S}(\theta)$ существует одна линейная аппроксимация $\mathfrak{S}(\mathring{\theta})$, признаваемая как наилучшая – в среднеквадратическом смысле близости ее отклика к наблюдаемому отклику системы $y(t)$ на воздействие $u(t)$ – среди всех линейных моделей $\mathfrak{S}(\theta)$ [5, с. 55]). Представим эту наилучшую модель соотношениями (1), используя нижний индекс $_t$ для дискретного времени и стандартное обозначение оператора математического ожидания $\mathbf{E}\{\cdot\}$:

$$
\mathfrak{S}(\mathring{\theta}) : \left\{ \begin{array}{c} x_{t+1} = \Phi(\mathring{\theta})x_t + \Psi(\mathring{\theta})u_t + \Gamma(\mathring{\theta})w_t\,,\ x_t \in \mathbb{R}^n\,,\ t \in \mathbb{Z}_+ \\ y_t = H(\mathring{\theta})x_t + v_t\,,\ y_t \in \mathbb{R}^m\,,\ t \in \mathbb{Z}_1 \\ \bar{x}_0(\mathring{\theta}) \triangleq \mathbf{E}\left\{x_0(\mathring{\theta})\right\},\ \Pi_0(\mathring{\theta}) \triangleq \mathbf{E}\left\{[x_0 - \bar{x}_0(\mathring{\theta})][x_0 - \bar{x}_0(\mathring{\theta})]^{\mathrm{T}}\right\} \\ \mathbf{E}\{w_t\} = 0, \quad \mathbf{E}\{w_t w_t^{\mathrm{T}}\} = Q(\mathring{\theta}) \geqslant 0\,, \quad \mathbf{E}\{w_t v_t^{\mathrm{T}}\} = 0 \\ \mathbf{E}\{v_t\} = 0, \quad \mathbf{E}\{v_t v_t^{\mathrm{T}}\} = R(\mathring{\theta}) > 0\,. \end{array} \right\} \tag{1}
$$

В этом представлении будем понимать $\mathring{\theta}$ как неизвестное «истинное» значение θ.

Замечание 1. *Далее пользуемся сокращенными записями:* $\mathring{\Phi}$ *вместо* $\Phi(\mathring{\theta})$, $\mathring{\Psi}$ *вместо* $\Psi(\mathring{\theta})$, $\mathring{\Gamma}$ *вместо* $\Gamma(\mathring{\theta})$, $\mathring{H}$ *вместо* $H(\mathring{\theta})$, Φ *вместо* $\Phi(\theta)$, Γ *вместо* $\Gamma(\theta)$, H *вместо* $H(\theta)$ *и т. п., полагая, что такие замены не усложняют изложение.*

Замечание 2. *Все употребляемые ниже* $(mn \times n)$*-матрицы наблюдаемости*

$$
W(H,\Phi) = \left[H^{\mathrm{T}} \mid \Phi^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}} \mid \cdots \mid \left(\Phi^{n-1}\right)^{\mathrm{T}} H^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} \triangleq W(\theta) \tag{2}
$$

обладают свойством полноты ранга: $\forall\theta \in \Theta : \operatorname{rank}\{W(H,\Phi)\} = n$, *поэтому*

$$
W^{+}(H,\Phi) = \left[W(H,\Phi)^{\mathrm{T}}W(H,\Phi)\right]^{-1} W(H,\Phi)^{\mathrm{T}} \triangleq W^{+}(\theta).
$$

Кроме исходного физически-структурированного представления (1), существует инновационное представление (3), известное как оптимальный фильтр Калмана:

$$
\mathfrak{M}(\mathring{\theta}) : \left\{ \begin{array}{c} x_{t+1|t} = \mathring{\Phi}x_{t|t} = \mathring{\Phi}x_{t|t-1} + \mathring{\Psi}u_t + \mathring{G}_t\mathring{r}_t,\ \mathring{G}_t \triangleq \mathring{\Phi}\mathring{K}_t \\ x_{t|t} = x_{t|t-1} + \mathring{K}_t\mathring{r}_t,\ \mathring{r}_t \triangleq y_t - y_{t|t-1},\ y_{t|t-1} = \mathring{H}x_{t|t-1} \\ \mathring{K}_t = \mathring{P}_{t|t-1}\mathring{H}^{\mathrm{T}}\left[\mathring{H}\mathring{P}_{t|t-1}\mathring{H}^{\mathrm{T}} + \mathring{R}\right]^{-1} \\ \mathring{P}_{t+1|t} = \mathring{\Phi}\mathring{P}_{t|t}\mathring{\Phi}^{\mathrm{T}} + \mathring{\Gamma}\mathring{Q}\mathring{\Gamma}^{\mathrm{T}},\ \mathring{P}_{t|t} = \mathring{P}_{t|t-1} - \mathring{K}_t\mathring{H}\mathring{P}_{t|t-1} \\ x_{k|t} = \mathring{\Phi}^{k-t}x_{t|t},\ y_{k|t} = \mathring{H}x_{k|t}, \quad k \geqslant t \end{array} \right\} \tag{3}
$$

где $x_{k|t}$ обозначает наилучшую оценку для x_k при учете всех данных y_j, $1 \leqslant j \leqslant t$.

2.2. Наилучшая установившаяся линейная модель $\overline{\mathfrak{M}}(\mathring{\theta})$

Рассмотрим установившийся режим, достигаемый в (3) при возрастании интервала наблюдения. Это возможно, когда пара матриц $\{\mathring{\Phi}, (\mathring{\Gamma}\mathring{Q}\mathring{\Gamma}^{\mathrm{T}})^{1/2}\}$ в (1), (3) стабилизируема. Эту модель – цель идентификации – обозначим $\overline{\mathfrak{M}}(\mathring{\theta})$. Она реализуется в (3), когда итерации Риккати для $\mathring{P}_{t+1|t}$ в (3) вошли в режим *алгебраических уравнений Риккати* (Algebraic Riccati Equations, ARE).

2.3. Множество адаптивных моделей $\overline{\boldsymbol{\mathcal{A}}} \triangleq \{\overline{\mathfrak{M}}(\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$

Подобно (3) образуем множество адаптивных моделей $\mathcal{A} \triangleq \{\mathfrak{M}(\theta) : \theta \in \Theta\}$: в них θ вместо $\mathring{\theta}$. Рассмотрим модели $\mathfrak{M}(\theta)$ множества $\mathcal{A}$ как достигшие установившегося режима: в них итерации Риккати по типу итераций для $\mathring{P}_{t+1|t}$ в (3) вошли в режим ARE. Это множество установившихся адаптивных моделей обозначим $\overline{\mathcal{A}} \triangleq \{\overline{\mathfrak{M}}(\theta) : \theta \in \Theta\}$. Теперь формально предположим, что для каждой установившейся модели $\overline{\mathfrak{M}}(\theta)$ построен ВФК$\{\overline{\mathfrak{M}}(\theta)\} \triangleq$ ВФК(θ), осуществлена его численная минимизация и тем самым найден единственный результат $\bar{\theta} \triangleq \operatorname{argmin}_\theta$ВФК$\{\overline{\mathfrak{M}}(\theta)\}$, которым завершается (в теоретическом пределе при $t \to \infty$) процесс адаптации. Формально, это есть процесс «сканирования» множества $\overline{\mathcal{A}}$, чтобы отыскать в нем $\overline{\mathfrak{M}}(\bar{\theta})$. Вопрос заключается в следующем: Как соответствующие предельные значения $\bar{\Phi} \triangleq \Phi(\bar{\theta})$, $\bar{\Psi} \triangleq \Psi(\bar{\theta})$, $\bar{\Gamma} \triangleq \Gamma(\bar{\theta})$, $\bar{H} \triangleq H(\bar{\theta})$ и т. п. матриц адаптивных моделей связаны с их «точными» значениями $\mathring{\Phi} \triangleq \Phi(\mathring{\theta})$, $\mathring{\Psi} \triangleq \Psi(\mathring{\theta})$, $\mathring{\Gamma} \triangleq \Gamma(\mathring{\theta})$, $\mathring{H} \triangleq H(\mathring{\theta})$ и т. п.?

2.4. Множество адаптивных моделей $\overline{\boldsymbol{\mathcal{A}^*}} \triangleq \{\overline{\mathfrak{M}^*}(\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\}$ в базисе МСНМ – мультисенсорных стандартных наблюдаемых моделей

Известно [6], что матрицы

$$\begin{array}{ll} \Phi_* = W_* \Phi W_*^{-1} \triangleq \Phi_*(\theta)\,, & \Psi_* = W_* \Psi \triangleq \Psi_*(\theta) \\ \Gamma_* = W_* \Gamma \triangleq \Gamma_*(\theta)\,, & H_* = H W_*^{-1} \end{array} \tag{4}$$

единственным образом определяют эквивалентное представление

$$\overline{\mathfrak{M}^*}(\theta) : \left\{ \begin{array}{l} x^*_{t+1} = \Phi_* x^*_t + \Psi_* u_t + \Gamma_* w_t\,,\ t \in \mathbb{Z}_+ \\ y_t = H_* x^*_t + v_t\,,\ t \in \mathbb{Z}_1 \end{array} \right\} \tag{5}$$

системы в форме МСНМ с матрицами

$$\Phi_* = \begin{array}{cl} \begin{array}{cccc} \overbrace{\qquad\qquad}^{p_1} & \overbrace{\qquad\qquad}^{p_2} & \qquad & \overbrace{\qquad\qquad}^{p_m} \end{array} & \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & I \\ 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c}{* \ \ldots \ *} \end{array} & \begin{array}{c} \\ 0 \\ \\ \hline * \ \ldots \ * \end{array} & \ldots & \begin{array}{c} \\ 0 \\ \\ \hline * \ \ldots \ * \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \\ 0 \\ \\ \hline * \ \ldots \ * \end{array} & \begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & I \\ 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c}{* \ \ldots \ *} \end{array} & \ldots & \begin{array}{c} \\ 0 \\ \\ \hline * \ \ldots \ * \end{array} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \begin{array}{c} \\ 0 \\ \\ \hline * \ \ldots \ * \end{array} & \begin{array}{c} \\ 0 \\ \\ \hline * \ \ldots \ * \end{array} & \ldots & \begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & I \\ 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c}{* \ \ldots \ *} \end{array} \end{array}\right] & \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} p_1 \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} p_2 \\ \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} p_m \end{array} \end{array} \triangleq \Phi_*(\theta) \tag{6}$$

$$H_* = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}}_{p_1} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}}_{p_2} & \begin{matrix} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{matrix} & \underbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{matrix}}_{p_m} \end{array}\right],$$

если некоторые числа r_j выбраны пользователем так, чтобы

$$0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_{m-1} < r_m = n$$
$$p_j \triangleq r_j - r_{j-1}, \quad j = \overline{1, m}$$

и обратимая $(n \times n)$-матрица W_* определена выражением

$$W_* \triangleq W_*(\theta) = \left[h_1^{\mathrm{T}} \ldots (h_1\Phi^{p_1-1})^{\mathrm{T}} \mid h_2^{\mathrm{T}} \ldots (h_2\Phi^{p_2-1})^{\mathrm{T}} \mid \cdots \right.$$
$$\left. \cdots \mid h_m^{\mathrm{T}} \ldots (h_m\Phi^{p_m-1})^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}. \tag{7}$$

Числа $(p_1, \ldots, p_m)$ известны как *частные индексы наблюдаемости*, а W_* есть *МСНМ-матрица наблюдаемости*. Особенности перехода к МСНМ при построении ВФК(θ) и его численной минимизации проанализированы в [6] и [7], включая символьные вычисления величин (2), (4), (5), (6) и (7) для выявления их зависимости от θ.

3. Заключение

Данный метод нашел свои применения в различных областях: от навигации до обработки медико-биологических данных и оценивания канала в коллективных сетях цифровых абонентских линий связи. Эта работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Ульяновской области РФ: проекты № 18-47-730001р_а и № 18-41-732002р_мк. Детально этот метод изложен в публикациях [6] и [7], в том числе, в них дан ответ на вопрос раздела (2.3.).

Список литературы

1. Caines P.E. Linear Stochastic Systems. USA & Canada: John Wiley & Sons, Inc., 1988. 874 p.
2. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем / Пер. с англ. Под ред. Я.З. Цыпкина. М.: Мир, 1971. 400 с.
3. Semushin I.V. The APA Based Time-Variant System Identification // 53rd IEEE Conference on Decision and Control. Los Angeles: IEEE, 2014. P. 4137-4141. URL: http://dx.doi.org/10.1109/CDC.2014.7040033
4. Verdult V., Verhaegen M. Subspace Identification of Multivariable Linear Parameter-varying Systems // Automatica. 2002. Vol. 38. P. 805-814.
5. Schoukens J., Vaes M., Pintelon R. Linear System Identification in a Nonlinear Setting // IEEE Control Systems. 2016. Vol. 36, No. 3. P. 38-85.
6. Semushin I.V. Adaptation in Stochastic Dynamic Systems—Survey and New Results II // Int. J. Communications, Network and System Sciences. 2011. Vol. 4, No. 4. P. 266-285. URL: http://file.scirp.org/pdf/IJCNS20110400007_96754846.pdf
7. Semushin I.V., Tsyganova Ju.V. Adaptation in Stochastic Dynamic Systems – Survey and New Results IV: Seeking Minimum of API in Parameters of Data // Int. J. Communications, Network and System Sciences. 2013. Vol. 6. P. 513-518. URL: https://file.scirp.org/Html/5-9701802_41061.htm.