УДК 517.977

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ С КВАДРАТИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ КАЧЕСТВА

К.А. Царьков

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: k6472@mail.ru

Ключевые слова: стохастическая управляемая система, оптимальное управление, нелинейная система, квадратичный функционал качества, диффузионно-скачкообразный процесс.

Аннотация: Рассматривается задача оптимального программного управления линейными по состоянию и нелинейными по управлению стохастическими системами со скачкообразной нелинейной по управлению добавкой. Функционал качества квадратичен по состоянию. Показано, что оптимальный процесс управления может быть получен на основе решения соответствующей детерминированной оптимизационной задачи.

1. Введение

Данная работа посвящена исследованию задач оптимизации линейных по состоянию стохастических систем. Оптимальное управление ищется в виде неслучайной функции времени. Предполагается, что функционал качества управления имеет вид математического ожидания линейно-квадратичной по состоянию функции. Ключевая идея построения приведенного здесь результата заключается в том, что такой функционал линейно выражается через первый и второй начальные моменты, а уравнения для их нахождения представляют собой замкнутую систему. Это означает, что вопрос минимизации функционала качества можно без особого труда свести к детерминированной задаче оптимального управления моментами, за счет чего решается проблема поиска оптимальной функции управления.

Однако, как правило, функционал качества определяется на множестве пар «траектория»-управление, элементы которой связаны заданным дифференциальным (или интегральным) соотношением. В стохастическом случае это означает, что под решением задачи понимается не только найденная оптимальная функция управления, но и соответствующий ей оптимальный случайный процесс. В связи с этим зачастую возникает вопрос о том, какие решения (сильные или слабые) существуют у стохастического уравнения, и какое из них следует понимать под искомой оптимальной «траекторией». Но значение квадратичного функционала качества определяется не всеми свойствами случайного процесса, а только свойствами его первых двух моментных характеристик. И если при заданном управлении эти характеристики определены однозначно, то оптимальной «траекторией» может быть назван любой случайный процесс, являющийся сильным или слабым решением исходного стохастического уравнения после подстановки в него оптимальной функции управления.

Отметим, что рассмотрение только задач программного управления открывает существенно более широкие возможности по исследованию нелинейных по управлению систем, ведь тогда нелинейная зависимость коэффициентов системы или функционала качества от управления не влияет на возможность перехода к задаче управления моментами. При этом практическая ценность исследований остается высокой, т.к. их результаты применимы и к задачам оптимального управления с обратной связью. Речь идет о тех ситуациях, когда вид оптимальной стратегии управления неизвестен, и интерес представляет поиск оптимальных стратегий заранее заданной структуры (например, поиск оптимального линейного регулятора с неполной обратной связью). В таком случае вопрос сводится к поиску оптимальных коэффициентов этой структуры, то есть оптимального программного управления.

Работа продолжает исследования статьи [1] и включает в себя обобщения полученных в ней результатов на системы диффузионно-скачкообразного типа [2].

2. Постановка задачи

Рассмотрим процесс управления, описываемый стохастическим интегральным уравнением [2, 3]

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left[A(s,u(s))x(s) + B(s,u(s))\right] ds + \\ + \int_{t_0}^{t} \sum_{l=1}^{\nu} \left[G^{(l)}(s,u(s))x(s) + C^{(l)}(s,u(s))\right] dw_l(s) + \sum_{k=1}^{P(t-t_0)} v(t_k), \tag{1}$$

где $t \in T = [t_0; t_1]$ – время; $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ – векторы состояния и управления системы в момент t; $w(t)$ – ν-мерный стандартный винеровский процесс; второй интеграл понимается в смысле Ито; $P(t)$ – неоднородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda(t,u(t))$ такой, что для любых $(t,u) \in T \times U$ выполнено $\lambda(t,u) > 0$; процесс $v(t)$ имеет заданное распределение с математическим ожиданием $M_v(t,u(t))$ и матрицей вторых начальных моментов $N_v(t,u(t))$; $u(t)$ – неслучайная борелевская функция на T со значениями в U; функции $A(t,u)$, $B(t,u)$, $\lambda(t,u)$, $M_v(t,u)$, $N_v(t,u)$, $G^{(l)}(t,u)$, $C^{(l)}(t,u)$, $l = \overline{1,\nu}$, измеримы по Борелю и ограничены на $T \times U$; U – компакт. Случайный вектор x_0 имеет заданное распределение с математическим ожиданием $m_0 \in \mathbb{R}^n$ и ковариационной матрицей $K_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Предполагается, что величина x_0 и процессы $P(t)$, $v(t)$, $w_l(t)$, $l = \overline{1,\nu}$, независимы в совокупности.

Определим множество допустимых процессов управления $\mathcal{D}_x$ как множество таких пар $z_x = (x(\cdot), u(\cdot))$, что при заданной функции управления $u(t)$ случайный процесс $x(t)$ является решением уравнения (1). На множестве $\mathcal{D}_x$ зададим квадратичный функционал качества управления

$$J_x = \mathbb{E}\int\limits_{t_0}^{t_1} \left(x^{\mathrm{T}}(t)D(t,u(t))x(t) + S^{\mathrm{T}}(t,u(t))x(t) + E(t,u(t))\right)dt + \\ + \mathbb{E}\left[x^{\mathrm{T}}(t_1)Qx(t_1)\right] \to \min_{z_x\in\mathcal{D}_x}, \tag{2}$$

где при каждом $(t,u)\in T\times U$ выполнены условия $D(t,u)\geqslant 0$, $Q\geqslant 0$; функции $D(t,u)$, $S(t,u)$, $E(t,u)$ измеримы по Борелю и ограничены на $T\times U$.

Замечание. *Сформулированный выше набор условий на множество U и функции вида $F(t,u)$ обеспечивает выполнение естественного требования ограниченности снизу функционала (2). Если ослабить условия на множество U и разрешить ему быть неограниченным, то нужно потребовать, чтобы все $F(t,u)$ были измеримы и ограничены на любом компактном подмножестве $T\times\mathbb{R}^m$, а подынтегральная часть $x^{\mathrm{T}}D(t,u)x + S^{\mathrm{T}}(t,u)x + E(t,u)$ функционала (2) была при всех $(t,x,u)\in T\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ ограничена снизу некоторой константой.*

3. Детерминированная задача оптимизации

Пусть случайный процесс $x(t)$ является решением уравнения (1). Можно показать [1,3], что математическое ожидание $m(t)$ и матрица вторых начальных моментов $N(t)$ процесса $x(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{dm(t)}{dt} = A(t,u(t))m(t) + B(t,u(t)) + \lambda(t,u(t))M_v(t,u(t)), \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \frac{dN(t)}{dt} &= A(t,u(t))N(t) + N(t)A^{\mathrm{T}}(t,u(t)) + B(t,u(t))m^{\mathrm{T}}(t) + \\ &+ m(t)B^{\mathrm{T}}(t,u(t)) + \sum_{l=1}^{\nu}\Big(G^{(l)}(t,u(t))N(t)G^{(l)^{\mathrm{T}}}(t,u(t)) + \\ &+ C^{(l)}(t,u(t))m^{\mathrm{T}}(t)G^{(l)^{\mathrm{T}}}(t,u(t)) + G^{(l)}(t,u(t))m(t)C^{(l)^{\mathrm{T}}}(t,u(t)) + \\ &+ C^{(l)}(t,u(t))C^{(l)^{\mathrm{T}}}(t,u(t))\Big) + \lambda(t,u(t))\left[M_v(t,u(t))m^{\mathrm{T}}(t) + \right. \\ &\left. + m(t)M_v^{\mathrm{T}}(t,u(t)) + N_v(t,u(t))\right], \end{aligned} \tag{4}$$

$$m(t_0) = m_0, \quad N(t_0) = K_0 + m_0m_0^{\mathrm{T}}. \tag{5}$$

При помощи этих характеристик функционал (2) может быть переписан в виде

$$J = \int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\mathrm{tr}(D(t,u(t))N(t)) + S^{\mathrm{T}}(t,u(t))m(t) + E(t,u(t))\right]dt + \mathrm{tr}(QN(t_1)). \tag{6}$$

Введем в рассмотрение вектор $y \in R^{n(n+1)}$ такой, что

$$y = \mathrm{vec}(m, N) = \begin{pmatrix} m_1 \\ \dots \\ m_n \\ N_{11} \\ \dots \\ N_{n1} \\ \dots \\ N_{1n} \\ \dots \\ N_{nn} \end{pmatrix}.$$

Переходя к векторному аргументу y в равенствах (3)–(6), получим систему соотношений

$$\frac{dy(t)}{dt} = \tilde{A}(t, u(t))y(t) + \tilde{B}(t, u(t)), \quad y(t_0) = y_0 = \mathrm{vec}(m_0,\ K_0 + m_0 m_0^{\mathrm{T}}), \tag{7}$$

$$J_y = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left[\tilde{D}^{\mathrm{T}}(t, u(t))y(t) + E(t, u(t))\right] dt + \tilde{Q}^{\mathrm{T}} y(t_1) \to \min_{z_y \in \mathcal{D}_y}, \tag{8}$$

где

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline \tilde{A}_1 & \tilde{A}_2 \end{array}\right),$$

$$\tilde{A}_1 = B \oplus B + \sum_{l=1}^{\nu} \left(G^{(l)} \otimes C^{(l)} + C^{(l)} \otimes G^{(l)}\right) + \lambda(M_v \oplus M_v),$$

$$\tilde{A}_2 = A \oplus A + \sum_{l=1}^{\nu} \left(G^{(l)} \otimes G^{(l)}\right),$$

$$\tilde{B} = \mathrm{vec}\left(B + \lambda M_v, \sum_{l=1}^{\nu} C^{(l)} C^{(l)^{\mathrm{T}}} + \lambda N_v\right),$$

$$\tilde{D} = \mathrm{vec}(S, D), \quad \tilde{Q} = \mathrm{vec}\,(0, Q)\,.$$

Здесь символами $\otimes$ и $\oplus$ обозначены произведение и сумма Кронекера соответственно ($A \oplus B = A \otimes I_n + I_n \otimes B$); I_n – единичная матрица размера $n \times n$; множество $\mathcal{D}_y$ состоит из пар $z_y = (y(\cdot), u(\cdot))$ таких, что при заданной функции управления $u(t)$ функция $y(t)$ является решением уравнения (7).

Полученная задача является линейной по состоянию детерминированной задачей оптимизации ограниченного снизу линейного по состоянию функционала качества. При заданном управлении $u(t)$ все коэффициенты в управляемой системе и в функционале являются в общем случае нелинейными матричными функциями времени вида $F(t, u(t))$. К решению такой задачи может быть привлечен любой метод из широкого спектра известных на данный момент, например, принцип максимума Понтрягина, для которого гамильтониан и сопряженное уравнение имеют вид

$$H(t, y, \psi, u) = \psi^{\mathrm{T}} \left[\tilde{A}(t, u)y + \tilde{B}(t, u)\right] - \tilde{D}^{\mathrm{T}}(t, u)y - E(t, u),$$

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = -\tilde{A}^{\mathrm{T}}(t, u(t))\psi(t) + \tilde{D}(t, u(t)), \quad \psi(t_1) = -\tilde{Q}. \tag{9}$$

4. Основной результат

Значение функционала (8) на любой допустимой паре z_y может быть подсчитано по формуле

$$J(z_y) = -y_0^{\mathrm{T}}\psi(t_0) - \psi_0(t_0), \tag{10}$$

где скалярная функция $\psi_0(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\psi_0(t)}{dt} = -\tilde{B}^{\mathrm{T}}(t, u(t))\psi(t) + E(t, u(t)), \quad \psi_0(t_1) = 0,$$

а функция $\psi(t)$ является решением сопряженного уравнения (9).

Теорема. *Если найдено оптимальное решение $\overline{z}_y = (\overline{y}(\cdot), \overline{u}(\cdot))$ задачи (7)–(8), то значение $J(\overline{z}_y)$, подсчитанное по формуле (10), является минимальным и для функционала (2). Оптимальное решение $\overline{z}_x$ задачи (1)–(2) имеет вид $(\overline{x}(\cdot), \overline{u}(\cdot))$, где случайный процесс $\overline{x}(t)$ находится из решения уравнения (1) при $u(t) = \overline{u}(t)$.*

Следствие. *Пусть найдены оптимальные решения $\overline{z}_x$ и $\overline{z}_y$ задач (1)–(2) и (7)–(8) соответственно. Тогда если $\overline{z}_x = (\overline{x}(\cdot), \overline{u}(\cdot))$, а $\overline{z}_y = (\overline{y}(\cdot), \overline{u}(\cdot))$, то первый и второй начальные моменты случайного процесса $\overline{x}(t)$ составляют вектор $\overline{y}(t)$.*

5. Заключение

Интерес представляют следующие частные случаи рассмотренной в данной работе задачи:

- оптимальное управление интенсивностью скачков в скачкообразной системе;
- оптимальное управление величинами (моментными характеристиками) скачков в скачкообразной системе;
- оптимальное управление с неполной обратной связью в линейно-квадратичной задаче диффузионно-скачкообразного типа.

Изучение этих и других частных случаев и обобщений является предметом дальнейших исследований.

Список литературы

1. Хрусталев М.М., Царьков К.А. Достаточные условия относительного минимума в задаче оптимального управления квазилинейными стохастическими системами // Автоматика и телемеханика. 2018. № 12. С. 83-102.
2. Рыбаков К.А. Достаточные условия оптимальности в задаче управления системами диффузионно-скачкообразного типа // Труды XII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16-19 июня 2014 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 734-744.
3. Параев Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Сов. радио, 1976. 184 с.