УДК 531.3:681.5.01

К ТЕОРИИ СИНТЕЗА РОБАСТНОГО $\mathcal{H}_\infty/LQG$-РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

М.Е. Шайкин

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: shaikin@ipu.ru

Ключевые слова: робастное управление, внешнее возмущение, динамический регулятор, уравнение Риккати, принцип разделения.

Аннотация: В работе сопоставляются известные, полученные в [1] и [2] результаты синтеза робастных $\mathcal{H}_\infty/LQG$-регуляторов для линейных стохастических систем по двум различным критериям оптимальности: в [1] критерий квадратический, в [2] - энтропийный. Способы преобразования результатов синтеза к единому представлению излагаются в настоящем сообщении.

1. Введение

В работе [1] известная LQG-задача безусловной оптимизации обобщена на случай оптимизации при условии ограниченности заданным числом $\gamma > 0$ индуцированной нормы передаточной функции $H(s)$ замкнутой системы. В качестве функционала потерь в [1] принимался не обычный L_2-критерий $C(H) = \|H\|_2^2$, а его верхняя граница. Для решения задачи условной минимизации применялась техника множителей Лагранжа. Та же задача в работе [2] была поставлена как задача оптимизации по критерию минимума интеграла энтропии $J(H, \gamma)$. Оба способа решения приводят к одинаковым формулам для оптимальных регуляторов. Эквивалентность результатов весьма удивительна, так как получена при использовании двух подходов, внешне никак не связанных. Поскольку имеются различия в форме представляемых в [1] и [2] результатов, требуются некоторые усилия, чтобы сделать явной фактическую их идентичность. Получение необходимых для этого преобразований является целью настоящей заметки.

2. Постановка задачи

Постановка задачи становится очевидной после краткого сопоставления подходов к задаче $\mathcal{H}_\infty/LQG$, принятых в [1] и [2]. Пусть $x \in R^n, \hat{x} \in R^{\hat{n}}, \tilde{x} \in R^{n+\hat{n}}$ - векторы состояний объекта, динамического регулятора, замкнутой системы. Имеют место соотношения

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u, \quad z = C_1 x + D_{12} u, \quad y = C_2 x + D_{21} w,$$
$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}y, \quad u = \hat{C}\hat{x}; \quad \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}w, \quad z = \tilde{C}\tilde{x}.$$

Матрицы $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ легко определяются в силу $\tilde{x}' = (x',\, \hat{x}')$ (штрих - знак транспонирования). Например, $\tilde{B}' = (B_1',\, D_{21}'\hat{B}')$, $\quad \tilde{C} = (C_1,\, D_{12}\hat{C})$. Передаточная функция от входного возмущения w к регулируемому выходу z равна $H(s) = \tilde{C}(sI - \tilde{A})^{-1}\tilde{B}$. Принимаются обычные соглашения типа некоррелированности помех ($D_{21}B_1' = 0$), отсутствия (в силу $C_1'D_{12} = 0$) перекрестных членов в представлении $z'z = x'R_1x + u'R_2u$ и не очень ограничительные условия $D_{12}'D_{12} = I$, $D_{21}D_{21}' = I$.

Поскольку $z = C_1x + D_{12}\hat{C}\hat{x} = \tilde{C}\tilde{x}$, критерий $C(H) := \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}(z'(t)z(t))$ записывается в виде $C(H) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}(\tilde{x}'(t)\tilde{R}\,\tilde{x}(t)) = tr(\tilde{Q}\tilde{R})$ с матрицами $\tilde{R} = \tilde{C}'\tilde{C}$, $\tilde{Q} := \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}(\tilde{x}(t)\tilde{x}'(t))$. Матрица $\tilde{Q}$ удовлетворяет уравнению Ляпунова $\tilde{A}\tilde{Q} + \tilde{Q}\tilde{A}' + \tilde{B}\tilde{B}' = 0$, при этом $tr(\tilde{Q}\tilde{R}) < \infty$, если матрица $\tilde{A}$ асимптотически устойчива. При наличии ограничения $\|H(s)\|_\infty < \gamma$ рассматривается уравнение Риккати

$$\tilde{A}\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A}' + \tilde{B}\tilde{B}' + \gamma^{-2}\tilde{P}\tilde{R}\tilde{P} = 0.$$

Если существует его решение $\tilde{P} \geqslant 0$, то $\tilde{Q} \leqslant \tilde{P}$, откуда $C(H) \leqslant tr(\tilde{P}\tilde{R})$. Именно этим неравенством определяется верхняя граница $J(H, \gamma) = tr(\tilde{P}\tilde{R})$, которая положена в [1] в основание вспомогательного критерия, минимизируемого по параметрам регулятора $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$. Далее, из существования решения $\tilde{P} \geqslant 0$ уравнения Риккати следует, что матрица $\tilde{A}$ асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда пара $(\tilde{A}, \tilde{P})$ стабилизируема, и в этом случае $\|H(s)\|_\infty \leqslant \gamma$. Заметим, что в [1] ограничение задано условием $\|\tilde{H}(s)\|_\infty < \gamma$, $\quad \tilde{H}(s) \neq H(s)$, где $\tilde{H}(s)$ – передаточная функция от w к выходному сигналу $z_\infty = C_{1\infty}x + D_{12\infty}u$, не равному, вообще говоря, регулируемому выходу z . Соотношения, аналогичные приведенным выше, имеют место и в случае замены $H(s)$ на функцию $\tilde{H}(s)$ с одновременной заменой $\tilde{C}$ на матрицу $\tilde{C}_\infty = (C_{1\infty},\, D_{12\infty}\hat{C})$. При таком обобщении достаточные условия разрешимости $\mathcal{H}_\infty/LQG$-задачи приводят в [1] к системе из трех связанных алгебраических уравнений Риккати. Наша цель - получить из общей теории [1] частные результаты для случая $\tilde{H}(s) = H(s)$ (и $\hat{n} = n$) и сравнить их с результатами работы [2].

3. Альтернативные формы уравнений Риккати

Воспользуемся альтернативными формами записи уравнений Риккати, приведенными в [1].

Первая альтернативная форма

$$0 = AQ + QA' + V_1 + Q(\gamma^2 R_1 - \bar{\Sigma})Q, \tag{1}$$
$$0 = (A + \gamma^{-2}QR_1)'Z + Z(A + \gamma^{-2}QR_1) + R_1 + Z(\gamma^{-2}Q\bar{\Sigma}Q - \Sigma)Z, \tag{2}$$
$$0 = A_z\hat{Q} + \hat{Q}A_z' + V_1 + Q\bar{\Sigma}Q + \gamma^{-2}\hat{Q}R_z\hat{Q}, \tag{3}$$

где $A_z = A - \Sigma Z + \gamma^{-2}QR_1$, $\quad R_z = R_1 + Z\Sigma Z$. Заметим: редукция исходной в [1]системы уравнений Риккати к альтернативной справедлива лишь в предположениях

$Z > 0$ и положительной определенности матрицы $Z^{-1} - \gamma^{-2}\hat{Q}$, что обеспечено, если $\rho(Z\hat{Q}) < \gamma^2$ ($\rho(\cdot)$ - спектральный радиус). Введем обозначения

$$\hat{A} = A_z - Q\bar{\Sigma}, \quad \hat{B} = QC_2', \quad \hat{C} = -B_2'Z. \tag{4}$$

Предложение 1. *Пусть существуют матрицы $Q \geqslant 0, Z > 0, \hat{Q} \geqslant 0$, удовлетворяющие уравнениям (1) - (3) и соотношениям (4) . Тогда $\tilde{A}$ асимптотически устойчива, условие $\|H(s)\|_\infty \leqslant \gamma$ выполнено и $C(H) \leqslant J(H,\gamma) = tr(QR_1 + \hat{Q}R_z)$.*

Вторая альтернативная форма

Первое уравнение, для неизвестной Q, - то же самое, что (1), второе и третье, для переменных $Y := (Z^{-1} + \gamma^{-2}Q)^{-1}$ и $\hat{Q}$ имеют вид

$$0 = A'Y + YA + R_1 + Y(\gamma^{-2}V_1 - \Sigma)Y, \tag{5}$$

$$0 = A_y\hat{Q} + \hat{Q}A_y' + Q\bar{\Sigma}Q + \gamma^{-2}\hat{Q}R_y\hat{Q} \tag{6}$$

соответственно, где

$$A_y = A - \Sigma(Y^{-1} - \gamma^{-2}Q)^{-1} + \gamma^{-2}QR_1,$$
$$R_y = R_1 + (Y^{-1} - \gamma^{-2}Q)^{-1}\Sigma(Y^{-1} - \gamma^{-2}Q)^{-1}.$$

Как возникает уравнение (5)? В [1] предлагается алгоритм: рассмотреть комбинацию $Y[Z^{-1}(\text{ ур-е }(2))Z^{-1} + \gamma^{-2}(\text{ ур-е }(1))]Y$. Уравнение (6) получается из (3), если в последнем сделать подстановку $Z \mapsto (Y^{-1} - \gamma^{-2}Q)^{-1}$, которая получается из $Y := (Z^{-1} + \gamma^{-2}Q)^{-1}$. Утверждение, аналогичное **Предложению 1**, имеет место и для второй альтернативной формы. По существу, системы алгебраических уравнений Риккати, представленные в обеих формах, равносильны. Для уравнений (3) и (6) это почти очевидно: достаточно в (3) вместо Z подставить $(Y^{-1} - \gamma^{-2}Q)^{-1}$. Чтобы установить равносильность уравнений (2) и (5), умножим (2) слева и справа на матрицу $Z^{-1} = Y^{-1} - \gamma^{-2}Q$, при этом учтем, что $YZ^{-1} = I - \gamma^{-2}YQ$ и $Z^{-1}Y = I - \gamma^{-2}QY$.

Нетрудно проверить, что в обеих альтернативных формах уравнения для переменной $\hat{Q}$ являются излишними. Именно, уравнению (3) можно удовлетворить решением $\hat{Q} = \gamma^2 Z^{-1}$, а уравнению (6) - решением $\hat{Q} = \gamma^2 Y^{-1} - Q$. В итоге остается пара уравнений $(1),(2)$ или $(1),(5)$. Выбрав, например, вторую пару (для переменных Q и Y), придем к паре уравнений в работе [2], записанных в переменных X_∞ и Y_∞ вместо Y и Q соответственно. Удобно иметь под рукой следующую строку соответствия обозначений, принятых в [1] и [2]:

$$V_1 \to B_1B_1',\ \Sigma \to B_2B_2',\ R_1 \to C_1'C_1,\ \bar{\Sigma} \to C_2'C_2,\ (I - \gamma^{-2}QY)^{-1} \to Z_\infty.$$

Матрица Z_∞ возникает из тождества $Y := (Z^{-1} + \gamma^{-2}Q)^{-1}$, записанного в виде $Z = Y(I - \gamma^{-2}QY)^{-1}$, откуда $Z \to X_\infty Z_\infty$. Заметим, что матрица Z_∞ не симметрическая, поэтому $Z = Z' = Z_\infty' X_\infty$.

В обозначениях [2] система уравнений принимает вид

$$X_\infty A + A'X_\infty + C_1'C_1 + X_\infty(\gamma^{-2}B_1B_1' - B_2B_2')X_\infty = 0, \tag{7}$$

$$Y_\infty A' + AY_\infty + B_1B_1' + Y_\infty(\gamma^{-2}C_1'C_1 - C_2'C_2)Y_\infty = 0. \tag{8}$$

При $\gamma \to \infty$ уравнения $(7),(8)$ переходят в уравнение регулятора и уравнение фильтра LQG-теории соответственно. Оптимальный регулятор записывается в виде

$$\hat{A} = A + Y_\infty(\gamma^{-2}C_1'C_1 - C_2'C_2) - B_2B_2'X_\infty Z_\infty,\ \hat{B} = Y_\infty C_2',\ \hat{C} = -B_2'X_\infty Z_\infty.$$

4. Значения функционалов потерь в оптимальной точке

Из **Предложения 1** следует, что $J(H,\gamma) = tr(QR_1 + \hat{Q}R_z)$, где $R_z = R_1 + Z\Sigma Z$. В обозначениях [2] это записывается в виде

$$J(H,\gamma) = tr[Y_\infty C_1' C_1 + \hat{Q}(C_1' C_1 + X_\infty Z_\infty B_2 B_2' Z_\infty' X_\infty)]. \tag{9}$$

Видим, что минимальное значение критерия $J(H,\gamma)$ выражено через решение $\hat{Q}$ третьего уравнения, отличного от уравнений (1)-(2). Однако, в [2] формула иная:

$$I(H,\gamma) = tr[X_\infty B_1 B_1' + X_\infty Z_\infty Y_\infty X_\infty B_2 B_2'], \tag{10}$$

и это при том, что, как доказано в [2], $I(H,\gamma) = J(H,\gamma)$. Но можно и непосредственно доказать прямыми вычислениями (впрочем, только при $X_\infty > 0$), что правые части в (9) и (10) совпадают. Как было отмечено в конце раздела 3, уравнение (3) имеет решение $\hat{Q} = \gamma^2 Z^{-1} = \gamma^2 Z_\infty^{-1} X_\infty^{-1}$. Согласно [3], это решение, обозначим его $\hat{Q}_u$, является наибольшим, так что $0 \leqslant \hat{Q}_s \leqslant \hat{Q} \leqslant \hat{Q}_u$ для любого решения $\hat{Q}$, где $\hat{Q}_s$ - наименьшее из возможных. Выбирая наибольшее решение $\hat{Q}_u$ в формуле (9), получим значение функционала $J(H,\gamma)$, большее минимального на величину $tr[(\hat{Q}_u - \hat{Q}_s)R_z]$. В [2] доказано, что правые части в (9) и (10) совпадают, если в (9) выбрать $\hat{Q} = \hat{Q}_s$.

5. Заключение

Согласно [1], альтернативные формы уравнений Риккати дают большее понимание структуры исходной системы уравнений, они проще и удобнее при анализе и численных вычислениях. Кроме того, они проясняют взаимосвязи результатов работ [1] и [4] . Условие $\rho(Y_\infty X_\infty) < \gamma^2$ важно в теореме 3 работы [4] о необходимых и достаточных условиях существования допустимых регуляторов. Интересно также отметить связи результатов работ [1] и [2] с результатами работы [5] по теории $LEQG$ экспоненциально квадратичных регуляторов.

Список литературы

1. Bernstein D.S., Haddad W.M. LQG Control with an H_∞ Performance Bound: A Riccati equation Approach // IEEE Trans. Automat. Contr. 1989. Vol. 34, No. 3. P. 293-305.
2. Mustafa D., Glover K. Minimum Entropy H_∞ Control. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1990. 144 p.
3. Willems J.C. Least-squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation // IEEE Transactions on Automatic Control. 1971. Vol. 16, No. 6. P. 621-634.
4. Doyle J.C., Glover K., Khargonecar P.P., Fransis B.A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1989. Vol. 34, No. 8. P. 831-847.
5. Bensoussan A., van Schuppen J.W. Optimal control of partially observable stochastic systems with an exponential-of-integral performance index // SIAM Journal on Control and Optimization // 1985. Vol. 23, No. 4. P. 599-613.