УДК 519.24, 519.65

К ПРЕЦИЗИОННОЙ ЮСТИРОВКЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ СИСТЕМЫ ТИПА ГЛОНАСС

А.В. Банщиков
Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134

А.А. Ветров
Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134

А.В. Данеев
Иркутский государственный университет путей сообщения
Россия, 664074, Иркутск, Чернышевского ул., 15
E-mail: daneev@mail.ru

В.А. Русанов
Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134
E-mail: v.rusanov@mail.ru

Ключевые слова: регрессионно-тензорное моделирование, адаптивное управление, нелинейная оптимизация/

Аннотация: Исследуется многомерная нелинейная регрессионно-тензорная модель в обосновании необходимых и достаточных условий оптимального многофакторного процесса прецизионной калибровки параметров электромагнитного источника излучения на геостационарной орбите (в том числе, системы ГЛОНАСС). Предложена робастно-адаптивная стратегия апостериорного формирования целевого функционала электромагнитной наблюдаемости взвешенно-распределенного сигнала в фиксированном комплексе стационарных наземных точек на основе наблюдений этого сигнала, выполненных с погрешностью.

1. Введение

В основе современной орбитальной прецизионной верификации астроприборов [1–5] лежат сложные электронно-механические процессы, что актуализирует вопросы, связанные с разработкой их математических моделей [6]. В данном контексте востребованы регрессионные модели [7], в том числе важный класс образуют регрессионно-тензорные системы [8]. Эти системы, с одной стороны, охватывают полиноминальные модели, допуская аналитическое описание на базе тензорного исчисления [9], сильной дифференцируемости векторных отображений [10] и теории экстремальных задач. С другой стороны, данные модели не праздно являют себя, а активно работают [11], приобретая важную роль в апостериорном многофакторном нелинейном математическом моделировании электронно-механических [12] и оптико-механических систем [13], обеспечивая (в рамках оптимизации целевого функционала качества приема электромагнитного сигнала), адаптивную настройку параметров, понижающих энергетический уровень боковых лепестков электромагнитных излучателей [8, 11, 14].

В этой связи, ниже основное внимание уделяется задачам, поставленным в выводах работы [14]. В том числе, коррекции целевого функционала интенсивности наблюдаемого сигнала источника электромагнитного излучения (ИЭИ) на геостационарной орбите в регрессионно-тензорном моделировании процесса юстировки пространственно-геометрических параметров ИЭИ. При этом определяются регрессионные интерпретации многосвязных условий, налагаемых сложными ограничениями [15], допускающими на базе матричного анализа [16] построение оптимального режима адаптивной настройки параметров ИЭИ (в частности, геометрии и ориентации его антенны) в терминах математической модели вход–выход. Прогностическая модель сигнала ИЭИ строится по экспериментальным данным орбитальных верификационных испытаний на основе двухкритериальной идентификации методом наименьших квадратов (МНК) ковариантных тензоров [9] нелинейного уравнения ИЭИ, как многомерной тензорной регрессии с минимальной координатно-матричной нормой [17].

2. Мотивации, терминология и формулировка задачи

Пусть R – поле вещественных чисел, R^n – n-мерное векторное пространство над R с евклидовой нормой $\|\cdot\|_{R^n}$, $\mathrm{col}(y_1,\ldots,y_n)\in R^n$ – вектор-столбец с элементами $y_1,\ldots,y_n\in R$ и пусть $M_{n,m}(R)$ – пространство всех $n\times m$-матриц с элементами из R. Кроме того примем, что T_m^k – пространство всех ковариантных тензоров k-той валентности, т.е. вещественных полилинейных форм $f^{k,m}: R_1^m\times\ldots\times R_k^m\to R$ с нормой $\left\|f^{k,m}\right\|_{T_m^k} := \left(\sum t^2_{\ldots j\ldots}\right)^{1/2}$, где $\{t_{\ldots j\ldots}\}$ – «матрица координат» [9, с. 246] тензора $f^{k,m}$ относительно канонического базиса в R^m.

Пусть в процессе орбитальной юстировки $\{b_i\}_{i=\overline{1,n}}$ – комплекс стационарных точек наземного приёма сигнала ИЭИ, расположенного на геостационарном спутнике (например, системы ГЛОНАСС, т.е. радиус-векторы, соединяющие спутник и точки b_i, постоянны), $\omega\in R^m$ – некоторый фиксированный (опорный) вектор пространственно-угловых параметров антенны ИЭИ [11–15], v – целенаправленная вариация физико-геометрических предикторов [7] в процессе прецизионной настройки, $w(\omega+v)\in R^n$ – вектор прогностической интенсивности калибровочного сигнала ИЭИ, измеряемого в точках зондирования.

В такой постановке для компактного описания нелинейного адаптивного процесса параметрической орбитальной юстировки ИЭИ выделим к рассмотрению многомерную прогностическую систему вход–выход, описываемую векторно-тензорным k-валентным уравнением многофакторной регрессии вида:

(1) $$w(\omega+v)=\mathrm{col}\left(\sum_{j=0,\ldots,k} f_1^{j,m}(v,\ldots,v),\ldots,\sum_{j=0,\ldots,k} f_n^{j,m}(v,\ldots,v)\right)+\varepsilon(\omega,v).$$

Здесь $f_i^{j,m}\in T_m^j$, $\varepsilon(\omega,\cdot): R^m\to R^n$ – непараметризируемая вектор-функция класса

(2) $$\|\varepsilon(\omega,v)\|_{R^n}=o\left(\left(v_1^2+\ldots+v_m^2\right)^{k/2}\right),$$

$v = \mathrm{col}(v_1,\ldots,v_m)$, $f_i^{0,m}$ – тензор «ранга 0», представляющий интенсивность сигнала w_i, $i=\overline{1,n}$ в режиме ω орбитальной электронно-геометрической настройки передающей антенны ИЭИ.

Задача многомерного нелинейного регрессионно-тензорного моделирования многофакторного оптимального процесса орбитальной калибровки ИЭИ поставлена и подробно исследована в [11, 14] для 2-валентной модели (1). При этом получены аналитические решения трех методологических позиций данной задачи:

(I) для фиксированного вектор-предиктора $\omega \in R^m$ и его открытой окрестности $V \subset R^m$ определены аналитические условия, при которых вектор-функция $w(\cdot): V \to R^n$ показателей интенсивности калибровочного сигнала ИЭИ в точках зондирования b_i, $i=\overline{1,n}$ удовлетворяет регрессионной системе (1), (2);

(II) построен алгоритм идентификации координат тензоров $f_i^{j,m}$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{0,2}$ в 2-валентной регрессионно-тензорной модели (1) на базе решения двухкритериальной МНК-задачи вида:

$$\text{(3)}\qquad \begin{cases} \min\left(\sum\limits_{l=1,\ldots,q}\left(\left\| w_{(l)} - \mathrm{col}\left(\sum\limits_{j=0,\ldots,k} f_1^{j,m}(v_{(l)},\ldots,v_{(l)}),\ldots,\sum\limits_{j=0,\ldots,k} f_n^{j,m}(v_{(l)},\ldots,v_{(l)})\right)\right\|_{R^n}\right)^2\right)^{1/2}, \\ \min\left(\sum\limits_{i=1,\ldots,n}\ \sum\limits_{j=0,\ldots,k}\left\| f_i^{j,m}\right\|^2_{T_m^j}\right)^{1/2}, \end{cases}$$

где $w_{(l)} \in R^n$, $v_{(l)} \in R^m$, $l=\overline{1,q}$ – соответственно, векторы экспериментальных фактор-предикторов ИЭИ, т.е. $w_{(l)}$ – апостериорная «реакция» на целевую «вариацию» $v_{(l)}$ относительно координат опорного вектора ω при условии $\left\|v_{(l)}\right\|_{R^m} < 1$ (данное неравенство методологически диктуется условием (2)), q – число проведенных орбитальных экспериментов (определяется репрезентативностью модели (1)), проводимых с учетом динамических характеристик ИЭИ [18, 19];

(III) для 2-валентной регрессионно-тензорной модели (1) при заданном предикторе $\omega \in R^m$ и номинальном условии $\varepsilon(\omega,\cdot) \equiv 0$ получено аналитическое решение задачи орбитальной калибровки, как нелинейной «v-оптимизации» варьируемых (относительно вектора ω) фактор-предикторов настраиваемых физико-геометрических параметров ИЭИ:

$$\text{(4)}\qquad \max_{v\in R^m} F(v) := r_1 w_1(\omega+v) + \ldots + r_n w_n(\omega+v),$$

где вектор-функция $v \mapsto w(\omega+v) = \mathrm{col}(w_1(\omega+v),\ldots,w_n(\omega+v))$ имеет координатное представление согласно МНК-идентифицированной модели (1)–(3), $r_i > 0$ – весовые коэффициенты, отражающие приоритет наземных точек b_i, $i=\overline{1,n}$ зондирования сигнала ИЭИ.

Постановка задач (по выводам работы [14]):

(i) определить необходимые и достаточные условия разрешимости оптимизационной задачи (4) для 3-валентной модели (1);

(ii) построить алгоритм коррекции достаточных условий экстремума стационарной точки задачи (i) на основе r-параметрической настройки $r \mapsto r^{\mathrm{T}} w(\omega+v)$ функционала

$$\text{(5)}\qquad v \mapsto F(v) = r^{\mathrm{T}} w(\omega+v).$$

3. Оптимизация процесса юстировки параметров ИЭИ

Рассмотрим задачу (i) – оптимизации процесса юстировки параметров ИЭИ для модели (1) с $k=3$. Отметим, что решение сопутствующей задачи идентификации (II) при $k=3$ составляет модификация утверждения 2 из [14] (см. также [20]).

В такой математической постановке нелинейное прогностическое уравнение (1) можно подать в следующей векторно-матрично-тензорной форме:

(6) $$w(\omega+v)=c+Av+\operatorname{col}\left(v^{\mathrm{T}}B_1v+f_1^{3,m}(v,v,v),\ldots,v^{\mathrm{T}}B_nv+f_n^{3,m}(v,v,v)\right)+\varepsilon(\omega,v),$$

где $c\in R^n$, $A\in M_{n,m}(R)$, $B_i\in M_{m,m}(R)$, $i=\overline{1,n}$. Не теряя общности, считаем, что каждая матрица B_i имеет верхнюю треугольную структуру; это упрощает реализацию МНК-алгоритма (3).

Согласно (1) при $k=3$ функционал электромагнитной наблюдаемости (5) дважды непрерывно дифференцируем, что гарантирует равенство смешанных производных

(7) $$\partial^2F(v_1,\ldots,v_m)/\partial v_g\partial v_p=\partial^2F(v_1,...,v_m)/\partial v_p\partial v_g \quad \forall g,p=\overline{1,m}.$$

Поэтому в решении оптимизационной задачи (4) для 3-валентной модели (6) основным результатом согласно теореме 3 [10, с. 505] и теореме 7.2.5 [16] можно считать следующее ниже утверждение 1. Но вначале предварительно условимся, что $B_i^*:=(B_i+B_i^{\mathrm{T}})\in M_{m,m}(R)$, $i=\overline{1,n}$, где каждая B_i – матрица системы (6) (матрица тензора $f_i^{2,m}$ в постановке, когда он рассматривается в системе (1) не как симметричный). Сверх того, рассмотрим вектор-функцию

$$v\mapsto\Phi(v):=(r_1B_1^*+\ldots+r_nB_n^*)^{-1}\,(A^{\mathrm{T}}+[\nabla_vf_1^{3,m}(v,v,v),\ldots,\nabla_vf_n^{3,m}(v,v,v)])r,$$

где $\nabla_vf_i^{3,m}(v,v,v)$ – градиент функционала $v\mapsto f_i^{3,m}(v,v,v)$.

Утверждение 1. *Стационарные точки* $v^*\in R^m$ *задачи* (i) – *суть решения уравнения*

(8) $$v^*+\Phi(v^*)=0.$$

При этом достаточным условием $F(v^*)=\max\{F(v):v\in R^m\}$ *является требование, чтобы* v^*, *как стационарная точка функционала* (5), *имела эллиптический тип. Другими словами, в точке* v^* *для гессиана* $G(v,r)$ *функционала* (5) *должны выполняться неравенства*

(9) $$\det[b_{ij}]_p<0,\ \ p=\overline{1,m},$$

где $[b_{ij}]_p\in M_{p,p}(R)$, $p=\overline{1,m}$ *– главные подматрицы гессиана*

$$G(v^*,r)=r_1\left(B_1^*+[\partial^2f_1^{3,m}(v,v,v)/\partial v_g\partial v_p\big|_{v^*}]\right)+\ldots$$
$$+r_n\left(B_n^*+[\partial^2f_n^{3,m}(v,v,v)/\partial v_g\partial v_p\big|_{v^*}]\right)\in M_{m,m}(R),$$

что эквивалентно – характеристические числа $\lambda_p(v^*,r)$ *матрицы* $G(v^*,r)$ *удовлетворяют*

(10) $$\lambda_p(v^*,r)<0,\ p=\overline{1,m}.$$

Следствие 1. *Для* $k=2$ *гессиан функционала* (5) *и условия* (9), (10) *инвариантны к положению стационарной точки* v^*, *при этом гессиан равен* $G(r)=r_1B_1^*+\ldots+r_nB_n^*$, *что приводит к линейной зависимости чисел* $\lambda_p(r)$, $p=\overline{1,m}$ *от нормировки вектора* r.

Если $\operatorname{rank} G(r) = m$, *то решение уравнения* (8) *единственно и имеет вид* $v^* = -G^{-1}(r)A^{\mathrm{T}}r$, *что делает инвариантным положение точки* v^* *к нормировке вектора* r.

Одним из факторов, влияющих на геометрию стационарной точки v^* утверждения 1, является цифровая адаптивная параметрическая настройка $r \mapsto G(v^*, r)$, приводящая к выполнению эллиптических условий (9) или (10) – предмет исследования следующего раздела.

4. Адаптация целевого функционала на r-параметрическом семействе его гессианов

Рассмотрим постановку (ii): для стационарной точки задачи оптимизации (i) построить численную процедуру коррекции весовых коэффициентов $r \in R^n$, исходя из выполнения спектральных условий (10), т.е. обеспечения эллиптического характера стационарной точки v^* утверждения 1. Данная постановка актуальна в задаче орбитальной калибровки параметров ИЭИ, когда в некоторых наземных точках b_j надо ослабить (т.е. $r_j < 0$) прием ИЭИ-сигнала.

Пусть задан некоторый начальный вектор $r_0 \in R^n$ весовых коэффициентов из постановки (ii). Например, эвристический выбор r_0 может осуществляться, исходя из равенства его координат r_{0i}, $i = \overline{1,n}$ значениям некоторых функций $\Psi_i : R \to R$, зависящих от величин функционалов $J_i(v) := w_i(\omega + v)$, $i = \overline{1,n}$ из вспомогательных задач оптимального прогнозирования качества орбитальной юстировки ИЭИ по отдельным целевым показателям w_i.

Обозначим через $v^0 \in R^m$ некоторую стационарную точку функционала (5) в случае, когда r-приоритет точек зондирования равен r_0. Соответственно, через $G_0 \in M_{m,m}(R)$ обозначим гессиан данного функционала, вычисленный для пары (r_0, v^0) и пусть

$$G_i := B_i^* + [\partial^2 f_i^{3,m}(v,v,v) / \partial v_g \partial v_p \big|_{v^0}], \quad i = \overline{1,n}.$$

Тогда для допустимой линейной вариации Δr координат вектора $r_0 = \operatorname{col}(r_{01}, \ldots, r_{0n})$, задаваемой (в силу комментариев к формуле (4)) областью этой вариации $W \subset R^n$ вида

$$\Delta r := \operatorname{col}(\Delta r_1, \ldots, \Delta r_n) \in W, \; r_i = r_{0i} + \Delta r_i > 0, \; i = \overline{1,n},$$

Δr-параметрическое семейство линейных вариаций гессиана $G(v^0, r_0 + \Delta r)$ определяется матричным $m \times m$-многообразием вида:

$$G_0 + \sum_{i=1,\ldots,n} \Delta r_i G_i, \; \Delta r \in W. \qquad (11)$$

Утверждение 2. *Пусть* $r = r_0 + \Delta r$, $\left\{(\lambda_p(r_0), x_p), p = \overline{1,m}\right\} \subset R \times R^m$ *– множество собственных пар гессиана* G_0, *т.е.* $\lambda_p(r_0)x_p = G_0 x_p$, $p = \overline{1,m}$, *и пусть, исходя из реализации многообразия* (11), *заданы числа* $g_{pi} = x_p^{\mathrm{T}} G_i x_p / x_p^{\mathrm{T}} x_p$, $p = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,n}$. *Тогда собственные значения* $\lambda_p(v^0, r_0 + \Delta r)$, $p = \overline{1,m}$ *гессиана* $G(v^0, r_0 + \Delta r)$ *имеют вид*

$$
(12)\quad
\begin{aligned}
&\lambda_1(v^0, r_0+\Delta r) = \lambda_1(r_0) + \sum_{i=1,\dots,n} g_{1i}\Delta r_i + o\left(\|\Delta r\|_{R^n}\right),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\lambda_m(v^0, r_0+\Delta r) = \lambda_m(r_0) + \sum_{i=1,\dots,n} g_{mi}\Delta r_i + o\left(\|\Delta r\|_{R^n}\right).
\end{aligned}
$$

Следствие 2. *Пусть* $k=2,\ n=m,\ \Lambda(r_0):=\mathrm{col}(\lambda_1(r_0),\dots,\lambda_m(r_0))$ *– вектор характеристических чисел матрицы* $(r_{01}B_1^*+\dots+r_{0m}B_m^*)$ *и* $\{x_p\}_{p=\overline{1,m}}$ *– соответствующие им собственные векторы. Кроме того, пусть* $\Lambda^*:=\mathrm{col}\left(\lambda_1^*,\dots,\lambda_m^*\right)$ *– некоторый вектор характеристических чисел, «эталонных/образцовых» по критерию* (10), *и* $B:=[b_{pi}]$ *–* $m\times m$*-матрица с элементами*

$$b_{pi}=x_p^{\mathrm{T}}B_i^*x_p\,/\,x_p^{\mathrm{T}}x_p\,.$$

Тогда для $r_0+\Delta r$ *, где вектор вариации имеет представление* $\Delta r=B^{-1}(\Lambda^*-\Lambda(r_0))$, *собственные значения гессиана* $G(r_0+\Delta r)$ *будут* $o\left(\|\Delta r\|_{R^n}\right)$*-близки к эталонным* $\{\lambda_p^*\}_{p=\overline{1,m}}$.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 19-01-00301 и № 19-08-00746).

Список литературы

1. Алешин И.Н., Батурин В.В., Молоденков А.В. и др. Управление движением космического платформенного комплекса. V. Алгоритмы юстировки комплекса // Известия РАН. Теория и системы управления. 2002. № 3. С. 132-139.
2. Tanaka H. Surface error estimation and correction of a space antenna based on antenna gain-analyses // Acta Astronautica. 2011. Vol. 68, No. 7. P. 1062-1069.
3. Лебедев Д.В., Ткаченко А.И. Параметрическая юстировка комплекса «камера и звездный датчик», установленного на низкоорбитальном космическом аппарате // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 2. С. 153-165.
4. Митрохин В.Н., Можаров Э.О. Радиоголографический метод контроля профиля параболических зеркальных антенн по электромагнитному полю в ближней зоне // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Приборостроение». 2015. № 4. С. 81-95.
5. Ткаченко А.И. Усовершенствование методики полетной геометрической калибровки с использованием неизвестных ориентиров // Проблемы управления и информатики. 2017. № 2. С. 112-121.
6. Банщиков А.В., Бурлакова Л.А., Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н. Символьные вычисления в моделировании и качественном анализе динамических систем // Вычислительные технологии. 2014. Т. 19, № 6. С. 3-18.
7. Дрейпер Н.Р., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2007. 912 с.
8. Козырев В.А., Куменко А.Е., Рудых А.Г., Русанов В.А. Нелинейный регрессионно-тензорный анализ оптимальной установки электромагнитного источника излучения при несанкционированном сканировании его электромагнитного поля // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2010. Т. 53, № 10. С. 10-17.
9. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969. 476 с.
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
11. Русанов В.А., Данеев Р.А. Об адаптивной настройке параметров источника электромагнитного излучения на геостационарной орбите // Управляющие системы и машины. 2014. № 6. С. 12-17.
12. Каршаков Е.В. Задача калибровки электромагнитной системы относительного позиционирования // Управление большими системами. 2012. Вып. 37. С. 250-268.
13. Демин А.В., Менделеева Л.М. Алгоритм юстировки составных зеркал высокотемпературных телескопов // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2014. Т. 57, № 1. С. 51-56.

14. Rusanov V.A., Banshchikov A.V., Daneev A.V., Kumenko A.E., Vetrov A.A. On adaptive adjustment of parameters for the source of electromagnetic radiation on a geostationary orbit // Far East Journal of Electronics and Communications. 2016. Vol. 16, No. 3. P. 685-701.
15. Гряник М.В., Ломан В.И. Развертываемые зеркальные антенны зонтичного типа. М.: Радио и связь, 1987. 72 с.
16. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 656 с.
17. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986. 304 с.
18. Банщиков А.В. Анализ динамики механических систем большой размерности средствами компьютерной алгебры // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. 12, № 3. С. 15-27.
19. Rusanov V.A., Banshchikov A.V., Daneev A.V., Vetrov A.A., Voronov V.A. A posteriori simulation of dynamic model of the elastic element of satellite-gyrostat // Far East Journal of Mathematical Sciences. 2017. Vol. 101, No. 9. P. 2079-2094.
20. Статников Р.Б., Матусов И.Б. О решении задач многокритериальной идентификации и доводки опытных образцов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. № 5. С. 20-29.