

# КОНЕЧНО-ШАГОВЫЙ РАСЧЕТ ПРОГРАММНЫХ УПРАВЛЕНИЙ, НЕ ПОРОЖДАЮЩИЙ СИНГУЛЯРНЫХ СОСТОЯНИЙ ГИРОСИСТЕМЫ

**Э.И. Дружинин**

*Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН*  
664033, Иркутск, Лермонтова ул., 134  
E-mail: [druzh@icc.ru](mailto:druzh@icc.ru)

**И.В. Бычков**

*Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН*  
664033, Иркутск, Лермонтова ул., 134  
E-mail: [bychkov@icc.ru](mailto:bychkov@icc.ru)

**С.А. Ульянов**

*Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН*  
664033, Иркутск, Лермонтова ул., 134  
E-mail: [sau@icc.ru](mailto:sau@icc.ru)

**Ключевые слова:** расчет управлений, ориентация, космический аппарат, гиродины, кинематическое конфигурирование, коллинеарные оси прецессии, сингулярные состояния.

**Аннотация:** Вниманию предлагается решение известной «проблемы сингулярности исполнительных гиродинов». Проблема заключается в присутствии в вычисленных законах управления особых (сингулярных) состояний гиродинов, что приводит к прерыванию исполнения гиродинами вычисленного закона программного управления космическим аппаратом (КА). Еще в 70-ых годах был предложен итерационный расчет программных законов ориентации, безостановочно исполняемых гиродинами. В этом докладе предлагается новая конечно-шаговая технология расчета законов управления, не порождающая сингулярных состояний и исполняемых гиродинами безостановочно.

## 1. Введение

В докладе представлено решение известной проблемы сингулярности исполнительных гиродинов [1]. Проблема расчета программных управлений космическими аппаратами (КА), *изначально не содержащих сингулярных состояний* исполнительных однокарданных силовых гироскопов (гиродинов), исследуется специалистами уже более полувека [2-4], оставаясь актуальной до сих пор [5]. Повсеместно распространенный сегодня расчет управлений использует априорно заданный закон вращения КА при ориентации, *не обеспеченный управляемостью*, т.е. существованием управления, при котором назначенный закон вращения, является решением двухточечной краевой задачи нелинейных уравнений динамики КА [2-5]. Поэтому так вычисленные управления не гарантируют непрерывного исполнения рабочего режима. В 1980-х годах *итерационным* методом расчета были получены первые законы управлений с обеспечением управляемости краевых условий задачи [6, 8]. Полученные законы исполнялись гиро-

динами без перерывов, однако наличие в них сингулярных состояний гиросистемы не исключалось: все сингулярные состояния, встречающиеся в процессе исполнения закона ориентации, вычисленного в итерационном расчете, оказывались «проходимыми» [4] и безостановочность исполнения рабочего режима обеспечивалась.

Наконец, в 2017 году был получен метод **конечно-шагового расчета** управлений процессом ориентации КА как последовательности трех перманентных поворотов. Этот новый метод расчета **не порождает сингулярных состояний** исполнительных гиродинов. Приведем краткий вывод уравнений, обеспечивающих такой расчет.

## 2. Формирование уравнений для расчета законов управления, не порождающих сингулярностей гиросистемы

Приведем краткое аналитическое изложение этого результата. Закон сохранения кинетического момента аппарата-гиростата в стандартных для динамики гиростата обозначениях в инерциальной системе отсчета запишем в форме:

$$(1) \quad I(t)\omega(t) + k(t) = K^{\text{исо}} = \text{const} \neq 0.$$

Уравнение динамики вращения аппарата вокруг его центра масс в *системе отсчета, связанной с аппаратом*, имеет вид:

$$(2) \quad (I\omega(t) + k(t))' + \omega(t) \times (I\omega(t) + k(t)) = 0$$

Как известно, в *связанной системе отсчета* (ССО) **величина**  $|K^{\text{ССО}}|$  сохраняет значение.

Примем вектор кинетического момента в *связанных* осях  $K^{\text{ССО}}(t) = I\omega(t) + k(t)$  за *переменную состояния* КА. Угловую скорость КА  $\omega(t)$  в этом уравнении будем рассматривать в качестве параметра, определяемого гиростатическим моментом  $k(t)$  независимо от  $K$ . Для перманентного вращения  $\omega(t) = \omega(t)n_0$  это уравнение запишем в форме:  $K^{\text{ССО}}(t)' = -\omega(t) \langle n_0 \rangle K^{\text{ССО}}(t) = 0$ , где  $\langle n_0 \rangle$  – известная  $3 \times 3$  – кососимметрическая матрица составленная из компонент  $n_0$ .

Интегрируя это уравнение, получим:

$$K(t) = \exp\left\{-\langle n_0 \rangle \int_0^t \omega(\tau) d\tau\right\} K_0, \quad K_0 = K(0)$$

Заменим  $K(t)$  его составляющими из (1):

$$(3) \quad \omega(t)In_0 + k(t) = L(\varphi(t))K_0,$$

где  $L(\varphi) \equiv \exp\left\{-\langle n_0 \rangle \int_0^t \omega(\tau) d\tau\right\} K_0$  – ортогональная матрица,  $\varphi(t) \equiv \int_0^t \omega(\tau) d\tau$ . Пред-

ставим  $k(t)$  в форме двух аддитивных компонент:  $k(t) \equiv k_\omega(t) + k_K(\varphi(t))$ .

При этом разделении **величину**  $|k_K(t)|$  вектора  $k_K(t)$  выберем равной *постоянному* в ССО значению **величины** первого интеграла уравнений (2)  $|\omega(t)In_0 + k(t)| \equiv |K_p^{\text{ССО}}(t)| \equiv |K_p^{\text{исо}}| = \text{const}$ , *оставшейся после разгрузки* кинетического момента. Уравнение *перманентного вращения* (3) при этом примет вид:

$$(4) \quad \omega(t)In_0 + k_\omega(t) + k_K(t) = L(\varphi(t))K_{p0}^{\text{ССО}}.$$

При указанном выборе *величины* вектора  $k_K(t)$  закон изменения *вектора*  $k_K(t)$  в системе отсчета ССО в процессе гашения скорости  $\omega^*(t) \rightarrow 0$  определим, обеспечив синхронное вращение векторов  $k_K(t)$  и  $K_p^{cco}(t)$ :  $k_K(t) \equiv L(\varphi^*(t))K_{p0}^{cco} \equiv K_p^{cco}(t)$ . Материальная реализация такой компенсации влияния неразгруженного кинетического момента КА в связанных осях  $K_p^{cco}(t)$  осуществляется введением в КА трехстепенного гироскопа с управляемыми кардановыми кольцами и ротором с собственным кинетическим моментом равным величине неразгруженного кинетического момента  $|K_p^{исо}|$ .

При таком выборе **закона изменения вектора**  $k_K(t)$  вектор  $\omega(t)In_0 + k_\omega(t)$  в силу (4) будет **тождественно равным нулю**:  $\omega(t)In_0 + k_\omega(t) = 0$ . Таким образом, **во время перманентного вращения** КА уравнение (4) распалось на два: уравнения:

$$(5) \quad \omega(t)In_0 + k_\omega(t) = 0,$$

$$(6) \quad k_K(t) = L(\varphi(t))K_{p0}^{cco}.$$

Вектор гиростатического момента  $k_\omega(t)$ , определяющий в силу (5) в связанной с аппаратом системе координат закон перманентного гашения  $\omega(t)$ , формируется законами прецессий гиросузлов, вращаемых электроприводами.

### 3. Численная реализации расчетов по новой технологии

Задача переориентации заключается в переводе КА из начального состояния  $(\omega(t_0), \lambda(t_0))$  в заданное конечное состояние  $(\omega(t_f), \lambda(t_f))$ . Здесь начальный момент времени  $t_0$  фиксирован, тогда как финальный момент  $t_f$  определяется в результате решения. Продемонстрируем применение новой технологии расчета на решении задачи ориентации жесткого КА с тензором инерции  $I = \text{diag}\{12000; 21000; 23000\}$  (кгм<sup>2</sup>) и собственным кинетическим моментом каждого их шести роторов  $h = 100$  нмс. Пусть требуется переориентировать КА из начального состояния  $(\omega(t_0), \lambda(t_0))$ , где  $\omega(t_0) = [0.00043633; 0.00087266; 0.00034907]$  (рад/с) и  $\lambda(t_0) = [0.92388; 0; 0; 0.38268]$ , в конечное состояние  $(\omega(t_f), \lambda(t_f))$ , где  $\omega(t_f) = [0.00043633; 0.00087266; 0.00034907]$  (рад/с) и  $\lambda(t_f) = [0.70711; 0; 0; 0.70711]$ .

Весь *процесс расчета* законов управления включает расчет трех реальных перманентных поворотов, выполняемых последовательно во времени, и двух подготовительных к ним для перестройки гиросузлов. Как показывают графики (рис. 1, 2) углы прецессии гиросузлов  $\beta_i(t) \square \beta(t)$  на этапах перестройки являются постоянными:  $\beta(t) \equiv \beta_0^J$  ( $J \in \{II, IV\}$ ) и  $\dot{\beta}(t) = 0$ , а углы прецессии  $\alpha_i(t)$ ,  $i = x, y, z$ , изменяются по линейному закону:

$$(7) \quad \alpha_i(t) = \dot{\alpha}_i^J(t - t_0^J) + \alpha_{i0}^J, \quad (t_0^J \leq t \leq t_f^J = t_0^J + T^J), \quad \alpha_{if}^J = \alpha_i(t_f^J),$$

где  $\alpha_{i0}^J, \alpha_{if}^J$  – значения углов виртуальной прецессии гиросузлов в начальный и конечный моменты перестройки,  $T^J$  – длительность этапа перестройки.

Параметры  $\dot{\alpha}_i^J$  в законе (7) и длительность  $T^J$  перестройки ограничены скоростью гиروزлов  $\bar{\delta}$ :  $|\dot{\alpha}_i(t)| + |\dot{\beta}(t)| \leq \bar{\delta}$ .  $\bar{\delta} = 6$  об/мин. Длительность  $T^J$ , определяется как  $T^J = \max(|\alpha_{if}^J - \alpha_{i0}^J| / \bar{\delta})$ ,  $i \in \{x, y, z\}$ , а параметры  $\dot{\alpha}_i^J$  – формулами  $\dot{\alpha}_i^J = (\alpha_{if}^J - \alpha_{i0}^J) / T^J$ .

На этапах гашения, поворота и разгона (этапы I, III, V) закон виртуальной прецессии гиридинов  $\beta_i(t)$ ,  $i \in \{x, y, z\}$ , выбран одинаковым для трех коллинеарных пар в виде:

$$(8) \quad \beta(t) = \dot{\beta}^J (t - t_0^J) + \beta_0^J, \quad (t_0^J \leq t \leq t_f^J = t_0^J + T^J),$$

где  $J \in \{I, III, V\}$  – номер основного этапа; закон изменения величины угловой скорости при этом определяется выражением  $\omega(t) = \rho_0^J \cos \beta(t)$ . Для этапов гашения и разгона параметр  $\rho_0^J$  совпадает с величиной угловой скорости соответственно в начальный и конечный моменты времени, а на этапе разворота этот параметр имеет смысл максимально возможной скорости вращения КА и назначается исходя из возможностей гиросистемы обеспечивать эту скорость. Параметр  $\dot{\beta}^J$  в законе (8) берется так, чтобы удовлетворялось равенство  $|\dot{\beta}^J| = \bar{\delta}$ .

Как отмечалось ранее, на основных этапах углы виртуальной прецессии  $\alpha_i^J$ ,  $i = x, y, z$ , постоянны и находятся из решения системы трех уравнений:

$$(9) \quad s\alpha_y^J - c\alpha_x^J = -\frac{\rho_0^J}{2h} An_x^0, \quad s\alpha_z^J - c\alpha_y^J = -\frac{\rho_0^J}{2h} Bn_y^0, \quad s\alpha_x^J - c\alpha_z^J = -\frac{\rho_0^J}{2h} Cn_z^0.$$

Для решения системы (9) использовались стандартные средства *Matlab*. Ключевым шагом алгоритма вычисления законов виртуальной прецессии для этапа поворота Эйлера-Шаля является определение оси этого поворота КА, задаваемой ортом  $\mathbf{n}_0^{\text{ЭШ}}$ , и угла поворота  $\chi^{\text{III}}$ . Расчет этих величин выполнялся по известным формулам [11].

Проверка рассчитанных с помощью описанной выше технологии законов управления для рассматриваемого примера осуществлялась путем интегрирования полной модели КА

$$(7) \quad I\dot{\omega}(t) + \dot{\mathbf{k}}(t) = -\omega(t) \times (I\omega(t) + \mathbf{k}(t)),$$

$$(8) \quad \dot{\lambda} = \frac{1}{2} \omega \circ \lambda,$$

где  $\omega(t) = \omega(t)\mathbf{n}_0$  – перманентный закон вращения;  $\lambda$  – кватернион ориентации КА;  $\mathbf{k}(t) = \mathbf{k}_\omega(t) + \mathbf{k}_K(t)$  и компоненты векторов  $\mathbf{k}_\omega(t)$  и  $\mathbf{k}_K(t)$  в соответствии с описанной технологией определены уравнениями (5) и (6).

На рис. 1, 2 представлены полученные в результате интегрирования модели (7), (8) графики изменения элементов кватерниона положения  $\lambda$ , компонент вектора угловой скорости  $\omega$ , законы виртуальных прецессий  $\beta_i$ ,  $\alpha_i$  и соответствующих им реальных прецессий  $\delta_{i1}$  и  $\delta_{i2}$ . Римскими цифрами на рисунках обозначены соответствующие этапы переориентации. Отметим, что **время расчета законов управления для всех этапов решения задачи переориентации на персональном компьютере IntelCore2 QuadCPUQ9400 2.66 ГГц в сумме не превышает 0.2 с. Финальная ошибка** попадания КА в конечное состояние при численном интегрировании нелинейной модели КА с вычисленными управлениями **сопоставима с ошибками метода интегрирования.**

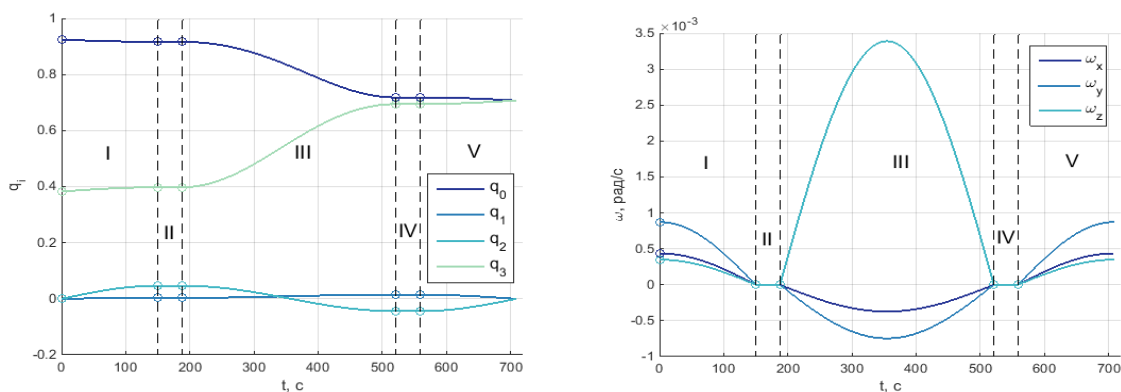


Рис. 1. Изменение компонентов кватерниона и вектора угловой скорости.

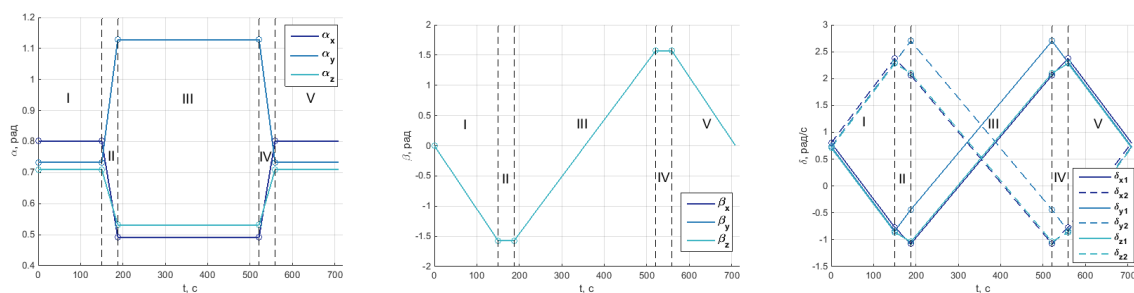


Рис. 2. Изменение виртуальных углов  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  и реальных углов прецессии гиросиловов.

## Список литературы

1. Дружинин Э.И. Расчет программных управлений, безостановочно исполняемых гиросиловами // Доклады Академии Наук. 2017. Т. 476, № 1. С. 22-25.
2. Amster M.N., Anderson R.P., Williams H.M. Analysis of twin-gyro attitude controller; final summary report. EL-EOR-13005. Dallas Texas. Chance Vought Aircraft, Inc. 1960.
3. Crenshaw J.W. 2-SPEED, A Single-Gimbal Control Moment Gyro Attitude Control System // AIAA Paper. 1973. P. 1-10.
4. Токарь Е.Н., Легостаев В.П., Михайлов М.В., Платонов В.П. Управление избыточными гиросиловыми системами // Космические исследования. 1980. Т. XVIII, Вып. 2. С. 152-157.
5. Kurokawa H. Survey of Theory and Steering Laws of Single-Gimbal Control Moment Gyros // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. Vol. 30, No. 5. P. 1331-1340.
6. Дружинин Э.И., Дмитриев А.В. К теории нелинейных краевых задач управляемых систем // В кн.: Дифференциальные уравнения и численные методы. Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1986. С. 179-187.
7. Дружинин Э.И. Об устойчивости прямых алгоритмов расчета программных управлений в нелинейных системах // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. №4. С. 14-20.
8. Дружинин Э.И., Воронов В.А. Прецизионное программное сканирование поверхности планеты нежестким орбитальным телескопом // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2011. № 4. С. 146-164.
9. Дружинин Э.И. Обусловленность прямых алгоритмов расчета программных управлений нелинейными системами // Труды Международного семинара «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби» // Екатеринбург: издательство Уральского университета, 2006. Т. 2. С. 136-142.
10. Васильев С.Н., Воронов В.А., Дружинин Э.И. Новая вычислительная технология формирования программных управлений в нелинейных системах // XIII Санкт-Петербургская международная конференция по интегрированным навигационным системам. Санкт-Петербург, Россия, 29-31 мая 2006 г. С. 48-56.
11. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.