УДК 62-50

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНЫМИ УКЛОНЕНИЯМИ НА КОНЕЧНОМ ВРЕМЕННОМ ГОРИЗОНТЕ

Д.В. Баландин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Россия, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

E-mail: dbalandin@yandex.ru

М.М. Коган

Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет

Россия, 603950, Нижний Новгород, ул. Ильинская, 65

E-mail: mkogan@nngasu.ru

Ключевые слова: максимальное уклонение выхода, линейная нестационарная система, обобщенная H_2 норма, линейные матричные неравенства.

Аннотация: Вводится понятие максимального уклонения выхода линейной нестационарной системы на конечном интервале времени как максимального по всем внешним возмущениям и начальным состояниям значения максимальной по времени евклидовой нормы выхода при условии, что сумма квадрата энергии внешнего возмущения и квадратичной формы начального состояния системы равна единице. Максимальное уклонение характеризуется в терминах решений дифференциальных матричных уравнений или неравенств. Показано, что синтез оптимальных управлений, в том числе и многокритериальных, минимизирующих максимальные уклонения нескольких выходов, осуществляется в терминах линейных матричных неравенств.

1. Введение

Задачи управления максимальными отклонениями выходов динамической системы на конечном и бесконечном временных интервалах при неопределенных начальных условиях и действии внешнего возмущения представляют собою особую трудность. Одними из первых работ по устойчивости на конечном интервале были [1, 2]. В дальнейшем были получены разнообразные условия устойчивости для различных классов систем, основанные на функциях Ляпунова. Например, исследование устойчивости и ограниченности на конечном интервале для непрерывных переключаемых систем с нелинейностями, удовлетворяющими обобщенным секторным условиям, при ограниченных возмущениях было проведено в [3]. Верхние и нижние оценки максимальных отклонений при неопределенных начальных условиях были изучены в [4]. В [5] для непрерывных систем и в [6] для дискретных систем были синтезированы законы управления, минимизирующие верхние оценки максимальных отклонений, вызванных неизвестным начальным возмущением, а в [7, 8] были получены законы управления, минимизирующие максимальное отклонение выхода непрерывной системы при нулевом начальном состоянии и внешнем возмущении с заданной энергией на бесконечном горизонте.

В рамках концепции так называемой практической устойчивости, которая в западной литературе получила название устойчивости на конечном интервале (“finite-time stability”), в [9, 10] были получены условия, при выполнении которых состояние линейной нестационарной системы на заданном конечном интервале при любом начальном состоянии из некоторой ограниченной области в отсутствие внешних возмущений не покидает в каждый момент времени заданные, например, эллипсоидальные области. Эти условия выражаются в терминах решений матричных дифференциальных уравнений или неравенств Ляпунова, численная дискретизация которых позволяет синтезировать нестационарные обратные связи, обеспечивающие указанную устойчивость замкнутой системы. В [11] в рамках так называемой концепции устойчивости по входу и выходу на конечном интервале (“input-output finite-time stability”) были синтезированы обратные связи, при которых выход линейной нестационарной системы с нулевыми начальными условиями находится в заданных пределах на конечном интервале при любых внешних возмущениях из определённого класса. Что касается максимальных отклонений на конечном интервале при наличии обоих факторов, т.е. при неопределённых начальных условиях и внешнем возмущении, то в [12] приведены достаточные условия ограниченности системы на конечном интервале при ненулевых начальных условиях (“finite-time boundedness with non-zero initial state”). В полной мере проблема оптимального управления, минимизирующего максимальные отклонения на конечном интервале при наличии неопределённых начальных условий и внешнего возмущения, не решена до сих пор.

В данной работе предпринимается попытка перейти от оценки максимального отклонения выхода линейной нестационарной системы на конечном интервале к точному значению так называемого максимального уклонения выхода при внешнем и начальном возмущениях, понимаемому как максимальное значение максимальной по времени евклидовой нормы выхода при условии, что сумма квадрата энергии внешнего возмущения и квадратичной формы начального состояния системы равна единице. Для этого здесь применяется вариационный подход. Максимальные уклонения выхода при внешнем возмущении и нулевом начальном состоянии, а также при неопределенном начальном состоянии в отсутствие внешнего возмущения также определяются соответствующим образом. Максимальные уклонения характеризуются в терминах решений матричного дифференциального уравнения, а затем в терминах решений линейных матричных неравенств. Синтезированы оптимальные законы управления, в том числе многокритериальные, минимизирующие в смысле Парето максимальные уклонения нескольких выходов.

2. Максимальное уклонение выхода линейной нестационарной системы

Рассмотрим динамический объект, описываемый неавтономной системой линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{x} = A(t)x + B(t)v, \quad x(t_0) = x_0, \\ &z = C(t)x, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in R^{n_x}$ – состояние объекта, $v \in L_2$ – возмущение, действующее на объект, принадлежащее классу интегрируемых с квадратом на отрезке $[t_0, T_0]$ функций времени, $z \in R^{n_z}$ – выход объекта. Под максимальным уклонением выхода системы (1) при начальном и внешнем возмущениях на конечном горизонте $[t_0, T_0]$ будем понимать величину

$$J_{0,v} = \sup_{x_0,\, v\in L_2} \frac{\sup_{t\in[t_0,T_0]} |z(t)|}{(x_0^{\mathrm{T}} R x_0 + \|v\|_2^2)^{1/2}}, \tag{2}$$

где $R = R^{\mathrm{T}} > 0$ – весовая матрица, отражающая относительную важность учета неопределенностей начальных условий и внешнего возмущения: чем "меньше" R, тем больший вес придается неопределенности в начальных условиях. Величину (2) можно рассматривать как индуцированную норму линейного оператора, порожденного системой (1) и отображающего пару $(x_0, v(t)) \in \mathrm{R}^{n_x} \times L_2[t_0, T_0]$ в $z(t) \in L_\infty[t_0, T_0]$.

Максимальное уклонение (2) может быть записано в виде

$$J_{0,v} = \sup_{T\in[t_0,T_0]} \sup_{x_0,\, v\in L_2} \frac{|z(T)|}{(x_0^{\mathrm{T}} R x_0 + \|v\|_2^2)^{1/2}}. \tag{3}$$

Заметим, что в последнем выражении величина $|z(T)|$ для каждого T зависит от внешнего возмущения на интервале $[t_0, T]$, поэтому точная верхняя грань по возмущениям берется, фактически, только по всем возмущениям на этом интервале.

В частном случае, когда начальные условия в системе (1) нулевые, максимальным уклонением выхода при внешнем возмущении назовем величину

$$J_v = \sup_{v\in L_2} \frac{\sup_{t\in[t_0,T_0]} |z(t)|}{\|v\|_2} = \sup_{T\in[t_0,T_0]} \sup_{v\in L_2} \frac{|z(T)|}{\|v\|_2}. \tag{4}$$

По аналогии с случаем стационарной системы и бесконечного горизонта величина J_v может быть названа обобщенной H_2 нормой.

В другом частном случае, когда внешнее возмущение отсутствует, максимальное уклонение выхода при начальном возмущении определим как

$$J_0 = \sup_{x_0\neq 0} \frac{\sup_{t\in[t_0,T_0]} |z(t)|}{(x_0^{\mathrm{T}} R x_0)^{1/2}} = \sup_{T\in[t_0,T_0]} \sup_{x_0\neq 0} \frac{|z(T)|}{(x_0^{\mathrm{T}} R x_0)^{1/2}}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Максимальное уклонение выхода системы (1) при начальном и внешнем возмущениях на горизонте $[t_0, T_0]$ определяется формулой*

$$J_{0,v} = \sup_{t\in[t_0,T_0]} \lambda_{\max}^{1/2} \left[C(t) Y(t) C^{\mathrm{T}}(t) \right], \tag{6}$$

где $\lambda_{\max}(\cdot)$ – максимальное собственное значение соответствующей матрицы, а $Y(t)$ есть решение дифференциального матричного уравнения

$$\dot{Y} = A(t)Y + YA^{\mathrm{T}}(t) + B(t)B^{\mathrm{T}}(t) \tag{7}$$

при $Y(t_0) = R^{-1}$. Максимальное уклонение J_0 при начальном возмущении определяется как в (6), (7) при $B(t) \equiv 0$. Максимальное уклонение J_v при внешнем возмущении определяется как в (6), (7) при $Y(t_0) = 0$.

3. Оптимальное управление максимальным уклонением

Рассмотрим теперь управляемую нестационарную систему

$$\begin{aligned} &\dot{x} = A(t)x + B(t)v + B_u(t)u, \quad x(t_0) = x_0 \\ &z = C(t)x + D(t)u, \end{aligned} \tag{8}$$

где u – управление. Поставим задачу построения оптимального управления в форме обратной связи $u(t,x) = \Theta(t)x$, $t \in [t_0, T_0]$, минимизирующего максимальное уклонение выхода замкнутой системы

$$J[\Theta(t)] = \sup_{x_0,\, v \in L_2} \frac{\sup_{t\in[t_0,T_0]} |z(t)|}{(x_0^{\mathrm{T}} R x_0 + \|v\|_2^2)^{1/2}}. \tag{9}$$

Иначе говоря, требуется найти переменные коэффициенты обратной связи $\Theta(t)$, минимизирующие функционал $J[\Theta(t)]$. Уравнения замкнутой системы имеют вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = A_c(t)x + B(t)v, \quad x(t_0) = x_0, \\ &z = C_c(t)x, \end{aligned} \tag{10}$$

где $A_c(t) = A(t) + B_u(t)\Theta(t)$, $C_c(t) = C(t) + D(t)\Theta(t)$.

Применяя теорему 1, получим

$$J[\Theta(t)] = \sup_{t\in[t_0,T_0]} \lambda_{\max}^{1/2} \left[C_c(t)Y_*(t)C_c^{\mathrm{T}}(t)\right], \tag{11}$$

где матрица $Y_*(t)$ есть решение дифференциального матричного уравнения

$$\dot{Y} = A_c(t)Y + YA_c^{\mathrm{T}}(t) + B(t)B^{\mathrm{T}}(t), \quad Y(t_0) = R^{-1}. \tag{12}$$

Для нахождения параметров оптимальной обратной связи введем матрицу $Z(t) = \Theta(t)Y(t)$ и проведем дискретизацию. Введем на отрезке $[t_0, T_0]$ равномерную сетку $t_k = t_{k-1} + h$, $k = 1, \dots, N$, где $h = (T_0 - t_0)/N$ и запишем дискретный аналог рассматриваемой задачи

$$\min \gamma^2 :$$

$$\begin{aligned} &Y_{k+1} - Y_k - h\left(A_kY_k + Y_kA_k^{\mathrm{T}} + B_{u,k}Z_k + Z_k^{\mathrm{T}}B_{u,k}^T + B_kB_k^{\mathrm{T}}\right) = 0, \\ &\begin{pmatrix} Y_k & \star \\ C_kY_k + D_kZ_k & \gamma^2 I \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad Y_0 = R^{-1}; \quad k = 0, \dots, N-1, \end{aligned} \tag{13}$$

где индекс k указывает на значение в момент времени t_k. Решив эту задачу полуопределенного программирования относительно неизвестных Y_k, Z_k, $k = 0, \dots, N-1$ и γ^2, найдем матрицы $\Theta_k = Z_kY_k^{-1}$.

4. Заключение

В докладе показано, что максимальные уклонения выходов линейной нестационарной системы на конечном временном горизонте при внешнем и/или начальном возмущениях можно характеризовать в терминах решений дифференциальных или алгебраических матричных уравнений и, как следствие, в терминах линейных матричных неравенств. Это позволяет синтезировать оптимальные по максимальному уклонению выхода законы управления, в том числе и многокритериальные. Результаты численных экспериментов, проведенных для задачи активной виброзащиты, демонстрируют эффективность предлагаемого подхода.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 18-41-520002, 19-01-00289).

Список литературы

1. Каменков Г.В. Об устойчивости движения на конечном интервале времени // ПММ. 1953. Т. 17, № 5. С. 529-540.
2. Лебедев А.А. Об устойчивости движения на заданном интервале времени // ПММ. 1954. Т. 18, № 2. С. 139-148.
3. Маликов А.И. Устойчивость на конечном интервале переключаемых систем с коническими нелинейностями // Труды XII Всероссийского Совещания по проблемам управления ВСПУ-2014. Москва, 16 - 19 июня 2014 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2014. С. 556-563.
4. Поляк Б.Т., Тремба А.А., Хлебников М.В., Щербаков П.С., Смирнов Г.В. Большие отклонения в линейных системах при ненулевых начальных условиях // Автоматика и телемеханика. 2015. № 6. С. 18–41.
5. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез линейных законов управления при фазовых ограничениях // Автоматика и телемеханика. 2009. № 6. С. 48-57.
6. Коган М.М., Кривдина Л.Н. Синтез многоцелевых линейных законов управления дискретными объектами при интегральных и фазовых ограничениях // Автоматика и телемеханика. 2011. № 7. С. 83–95.
7. Баландин Д.В., Коган М.М. Оптимальное по Парето обобщенное H_2-управление и задачи виброзащиты// Автоматика и телемеханика. 2017. № 8. С. 76-90.
8. Balandin D.V., Kogan M.M. Multi-objective Generalized H_2 Control // Automatica. 2019. Vol. 99. P. 319-322.
9. Amato F., Ariola M., Cosentino C., C.T. Abdallah C.T., Dorato P. Necessary and Sufficient Conditions for Finite-Time Stability of Linear Systems // Proc. Amer. Control Conf. Denver, USA. 2003. P. 4452-4456.
10. Garcia G., Tarbouriech S., Bernussou J. Finite-Time Stabilization of Linear Time-Varying Continuous Systems // IEEE Trans. Autom. Control. 2009. Vol. 54, No. 2. P. 364-369.
11. Amato F., Carannante G., De Tommasi G., Pironti A. Input–Output Finite-Time Stability of Linear Systems: Necessary and Sufficient Conditions // IEEE Trans. Autom. Control. 2012. Vol. 57, No. 12. P. 3051-3063.
12. Amato F., Ariola M., Cosentino C. Finite-time Control of Linear Time-Varying Systems via Output Feedback // Proc. Amer. Control Conf. Portland, USA. 2005. P. 4722-4726.