УДК 519.977

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

А.С. Бортаковский
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Россия, 125971, Москва, Волоколамское ш., 4
E-mail: asbortakov@mail.ru

И.В. Урюпин
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Россия, 125971, Москва, Волоколамское ш., 4
E-mail: uryupin93@yandex.ru

Ключевые слова: непрерывно-дискретные системы, переключаемые системы, оптимальное управление, дискретная минимизация.

Аннотация: Рассматривается задача оптимального управления системой, непрерывное изменение состояния которой описывается дифференциальными уравнениями, а мгновенные скачкообразные изменения состояния (переключения) – рекуррентными уравнениями. Моменты переключений, а также их количество заранее не заданы. Ставится задача нахождения наименьшего количества переключений, при котором значение функционала качества управления будет не хуже допустимого. Для решения поставленной задачи применяются достаточные условия оптимальности, в которых используется так называемая двухпозиционная функция цены. Приводятся академические примеры синтеза непрерывно-дискретных систем с минимальным числом переключений.

1. Постановка задачи

Пусть на заданном промежутке времени $T=[t_0,t_F]$ динамическая система совершает N переключений (скачков) в моменты времени $t_1,\ldots,t_N$, образующие неубывающую последовательность:

(1) $$t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_N \le t_{N+1} \doteq t_F\,,$$

Между неравными последовательными моментами переключений состояние системы изменяется непрерывно, согласно дифференциальному уравнению

(2) $$\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t))\,,\ t\in T_i \doteq [t_i,t_{i+1})\,,\ i\in \hat{N}\,,$$

а в моменты переключений – дискретно в соответствии с рекуррентным уравнением

(3) $$x_i = g(t_i,x_{i-},v_i)\,,\ i=1,\ldots,N\,.$$

В уравнениях движения (2),(3): $x(t)$, $u(t)$ – состояние системы и управление непрерывным движением в момент $t\in T_i$, $i\in \hat{N}\doteq\{i=0,1,\ldots,N\,|\,t_i<t_{i+1}\}$, $x(t)\in X\doteq \boldsymbol{R}^n$, $u(t)\in U\subset \boldsymbol{R}^p$; $x_i \doteq x(t_i)$ – состояние системы сразу после i-го переключения, x_{i-} – состояние системы непосредственно перед i-м переключением:

$$x_{i-} \doteq \begin{cases} x(t_i - 0),\, t_{i-1} < t_i, \\ x_{i-1},\, t_{i-1} = t_i; \end{cases}$$

v_i – управление переключением системы в момент t_i, $v_i \in V \subset \boldsymbol{R}^q$, V – заданное множество допустимых управлений переключениями. Предполагаем, что в уравнении (3) исключаются так называемые *фиктивные* переключения, при которых состояние системы не изменяется ($x_i = x_{i-}$) и фактического переключения нет. Равенство последовательных моментов в (1) означает, что система совершает мгновенные многократные переключения [1].

Множество допустимых процессов $D(t_0, x_0)$ составляют тройки $(x(\cdot), u(\cdot), \{v\})$, включающие абсолютно непрерывную на $T_i, i \in \hat{N}$, функцию $x(\cdot)$, ограниченную измеримую на T функцию $u: T \to U$; последовательность $\{v\} \doteq \{v_i\}_{i=1}^N$ векторов $v_i \in V$, удовлетворяющих уравнениям (2), (3) с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Подчеркнем, что количество N переключений и моменты $t_1, \ldots, t_N$ переключений не фиксированы и у разных допустимых процессов могут не совпадать.

На множестве $D(t_0, x_0)$ допустимых процессов задан функционал качества

(4) $$I(d) = \int_{t_0}^{t_F} f^0(t, x(t), u(t))\, dt + \sum_{i=1}^{N} g^+(t_i, x_{i-}, v_i) + F(x(t_F)),$$

где непрерывные скалярные функции f^0 и F ограничены снизу, а функция g^+ – неотрицательная. Отметим, что в функционале (4) количество переключений N и моменты переключений не заданы, а находятся в результате оптимизации. В задаче оптимального управления требуется найти наименьшее значение функционала (4) и оптимальный процесс $d^* \in D(t_0, x_0)$, на котором оно достигается

(5) $$I(d^*) = \min_{d \in D(t_0, x_0)} I(d).$$

В задаче минимизации переключений требуется найти наименьшее количество переключений N, при котором значение функционала (4) не превосходит заданной величины: $I \le \varepsilon$ В обеих задачах допустимы терминальные ограничения [2].

2. Функция цены и ее образующие

Решения поставленных задач будем искать на основе достаточных условий оптимальности управления с обратной связью. Обозначим через φ функцию цены, значение $\varphi(t_0, x_0)$ которой, по определению, равно значению функционала (4), вычисленному на оптимальном процессе. Определим *образующую* функции цены, значение $\varphi^N(t_0, x_0)$ которой равно минимальному значению функционала (4), вычисленному на процессе, оптимальном среди допустимых процессов, имеющих ровно N переключений, быть может, фиктивных. Функция цены связана со своими образующими равенством

(6) $$\varphi(t, x) = \min_{k \in \boldsymbol{Z}_+} \varphi^k(t, x),$$

где $\boldsymbol{Z}_+$ – множество целых неотрицательных чисел.

Применяя метод динамического программирования [3], выведем уравнения для образующих. Нулевая образующая $\varphi^0(t,x)$ соответствует оптимальному процессу без переключений. Поэтому она удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби – Беллмана (ГЯБ) с соответствующим терминальным условием:

(7) $$\min_{u\in U}\left(\varphi_t^0(t,x)+\varphi_x^0(t,x)\,f(t,x,u)+f^0(t,x,u)\right)=0\,,\ \varphi^0(t_F,x)=F(x)\,.$$

Существование решения уравнения (7) предполагается. Заметим, что нулевая образующая совпадает с обычной функцией цены в задаче оптимального управления непрерывной системой (2) без переключений с функционалом Больца.

Остальные образующие находятся в результате рекуррентной процедуры, в которой ключевую роль играет так называемая *двухпозиционная функция цены* $\phi(\theta,x_\theta\,|\,\tau,x_\tau)$. Она определяется как решение задачи Лагранжа для непрерывной системы (2) с фиксированными концами траектории:

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t))\,,\ x(\theta)=x_\theta\,,\ x(\tau)=x_\tau\,,\ \int_\theta^\tau f^0(t,x(t),u(t))\,dt\to\min\,.$$

Эта функция, как функция начальной позиции $(t,x)\to\phi(t,x\,|\,\tau,x_\tau)$, удовлетворяет уравнению ГЯБ с нулевым терминальным условием:

(8) $$\min_{u\in U}\left(\phi_t(t,x\,|\,\tau,x_\tau)+\phi_x(t,x\,|\,\tau,x_\tau)\,f(t,x,u)+f^0(t,x,u)\right)=0\,,\ \phi(\tau,x\,|\,\tau,x)=0\,.$$

Двухпозиционная функция цены является «нечетной»

$$\phi(\tau,x_\tau\,|\,\theta,x_\theta)=-\phi(\theta,x_\theta\,|\,\tau,x_\tau)\,.$$

Поэтому, как функция конечной позиции $(t,x)\to\phi(\theta,x_\theta\,|\,t,x)$, она удовлетворяет «противоположному» уравнению ГЯБ

$$\max_{u\in U}\left(\phi_t(\theta,x_\theta\,|\,t,x)+\phi_x(\theta,x_\theta\,|\,t,x)\,f(t,x,u)-f^0(t,x,u)\right)=0\,,\ \phi(\theta,x\,|\,\theta,x)=0\,.$$

Двухпозиционная функция $\phi(\theta,x_\theta\,|\,\tau,x_\tau)$ определяется для всех начальных (θ,x_θ) и конечных (τ,x_τ) позиций множества $T\times X$ при $\theta<\tau$. Если для некоторых пар позиций решение задачи (7) не существует, то можно доопределить функцию, полагая $\phi(\theta,x_\theta\,|\,\tau,x_\tau)=+\infty$. Отметим, что недопустимыми парами позиций являются все пары вида (t,x_0) и (t,x_1), где $x_0\neq x_1$, так как в задаче Лагранжа исключены скачки траектории. Для этих недопустимых пар полагаем $\phi(t,x_0\,|\,t,x_1)=+\infty$.

Пусть известна образующая φ^{k-1}, $k\in\boldsymbol{N}\doteq\{1,2,...\}$. Тогда, согласно принципу оптимальности Беллмана, следующая образующая φ^k удовлетворяет уравнению

(9) $$\varphi^k(t,x)=\min_{t\le\tau\le t_F}\ \min_{x_\tau\in X}\left(\phi(t,x\,|\,\tau,x_\tau)+\min_{v\in V}\left(\varphi^{k-1}(\tau,g(\tau,x_\tau,v))+g^+(\tau,x_\tau,v)\right)\right).$$

Несмотря на то, что двухпозиционная функция цены определена не для всех пар позиций, уравнение (9) корректное. Дело в том, что в уравнении (9) двухпозиционная функция цены находится под знаком двух операций минимизации. Выполняя эти операции, все недопустимые пары позиций отбрасываются, при этом правая часть уравнения оказывается определенной.

Начальным условием для рекуррентного уравнения (9) служит нулевая образующая $\varphi^0(t,x)$, которую тоже можно выразить через двухпозиционную функцию цены

$$\varphi^0(t,x)=\min_{x_F\in X}\left(\phi(t,x\,|\,t_F,x_F)+F(x_F)\right).$$

Это равенство связывает решения задач с функционалами Лагранжа и Больца.

3. Достаточные условия оптимальности

При решении уравнений (7)-(9) выполняются пять операций минимизации. В результате минимизации левых частей (7),(8) определяются оптимальные позиционные управления непрерывным движением системы

(10) $$\boldsymbol{u}^0(t,x) = \arg\min_{u \in U} \left(\varphi_t^0(t,x) + \varphi_x^0(t,x)\, f(t,x,u) + f^0(t,x,u) \right) = 0\,,$$

(11) $$\boldsymbol{u}(t,x \,|\, \tau,\xi) = \arg\min_{u \in U} \left(\phi_t(t,x \,|\, \tau,\xi) + \phi_x(t,x \,|\, \tau,\xi)\, f(t,x,u) + f^0(t,x,u) \right) = 0\,.$$

При минимизации правой части (9) определяются оптимальное позиционное управление переключениями

(12) $$\boldsymbol{v}^k(\tau,x) = \arg\min_{v \in V} \left(\varphi^{k-1}(\tau, g(\tau,x,v)) + g^+(\tau,x,v) \right)$$

и оптимальная позиция $(\boldsymbol{\tau}^k, \boldsymbol{x}^k)$ первого из оставшихся k переключений, т.е. оптимальный момент переключения:

(13) $$\boldsymbol{\tau}^k(t,x) = \arg\min_{t \le \tau \le t_F} \min_{x_\tau \in X} \left(\phi(t,x \,|\, \tau,x_\tau) + \min_{v \in V} \left(\varphi^{k-1}(\tau, g(\tau,x_\tau,v)) + g^+(\tau,x_\tau,v) \right) \right)$$

и оптимальное состояние перед переключением:

(14) $$\boldsymbol{x}^k(t,x) = \arg\min_{x_\tau \in X} \min_{t \le \tau \le t_F} \left(\phi(t,x \,|\, \tau,x_\tau) + \min_{v \in V} \left(\varphi^{k-1}(\tau, g(\tau,x_\tau,v)) + g^+(\tau,x_\tau,v) \right) \right).$$

Точки минимума (10)–(14) находятся при дополнительном условии – заданном количестве k оставшихся переключений, а оптимальное количество переключений определяется в результате минимизации (6):

(15) $$\boldsymbol{k}(t,x) = \arg\min_{k \in \boldsymbol{Z}_+} \varphi^k(t,x)\,.$$

Позиционные конструкции (10)–(15) представляют собой «управляющий комплекс», позволяющий найти оптимальный процесс для любого начального состояния.

Теорема. *Если для задачи* (5) *существуют последовательности функций* φ^k, $k \in \boldsymbol{Z}_+$, *удовлетворяющих на области определения уравнениям* (6)–(9), *то для оптимальности допустимого процесса* $(x(\cdot), u(\cdot), \{v\}) \in D(t_0, x_0)$ *с моментами переключений* $t_1, \ldots, t_N$, *образующими неубывающую последовательность* (1), *достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

$$N = \boldsymbol{k}(t_0, x_0)$$

$$u(t) = \boldsymbol{u}(t, x(t) \,|\, t_{i+1}, x(t_{i+1} - 0))\,,\ t \in T_i\,,\ i \in \hat{N}\,,$$

(16) $$v_k = \boldsymbol{v}^{N-k+1}(t_k, x_{k-})\,,\ t_k = \boldsymbol{\tau}^{N-k+1}(t_{k-1}, x_{k-1})\,,\ x_{k-} = \boldsymbol{x}^{N-k+1}(t_{k-1}, x_{k-1})\,,$$

где $k = 1, \ldots, N$. *При* $N = 0$ *равенства* (16) *опускаются.*

Доказательство теоремы аналогично доказательству достаточных условий в [1].

4. Минимизация количества переключений

Проблема минимизации количества переключений нередко встречается в прикладных задачах, в которых число переключений, как правило, ограничено. Например, для вывода спутника на геостационарную орбиту используется разгонный блок "Бриз-М", количество включений маршевого двигателя которого ограничено (не более десяти). Это ограничение, разумеется, учитывается при разработке схемы полета. Потребность минимизации количества переключений возникает естественным образом, если затраты на каждое переключение существенные. В этом случае желательно достичь цели управления с наименьшим количеством переключений.

Для решения задачи минимизации переключений выполняем построение образующих функции цены, используя рекуррентную процедуру (7)–(9) и проверяя на каждом шаге $k = 0,1,\ldots$ условие $\varphi^k(t_0, x_0) \le \varepsilon$. Если неравенство выполняется, то k – искомое наименьшее количество переключений.

Применение условий оптимальности и минимизации переключений демонстрируется на академических примерах аппроксимации заданных кривых кусочно-постоянными или кусочно-линейными траекториями непрерывно-дискретных систем. Решается также линейно-квадратичная задача синтеза оптимальных кусочно-постоянных управлений.

5. Заключение

На основе достаточных условий оптимальности разработан метод синтеза динамических систем, управляемых с переключениями. Количество переключений в процессе функционирования и сами моменты переключений заранее не заданы. Они находятся в результате оптимизации. В частности, решается задача минимизации количества переключений при заданной допустимой величине функционала качества. Трудности применения этого подхода заключаются в первую очередь в необходимости решать вспомогательную задачу Лагранжа с фиксированными, но произвольными терминальными состояниями. Эта трудность, кажется преодолимой, учитывая разработанные численные методы [4]. Остальные операции, выполняемые при синтезе управления, сводятся к задачам конечномерной оптимизации. Их решение, как правило, не вызывает особых затруднений. В целом, трудоемкость и алгоритмическая сложность предлагаемого метода гораздо выше, чем при синтезе оптимальных процессов без переключений. Но и решаемая задача более общая.

Предлагаемый метод синтеза можно использовать при решении различных задач сплайн-аппроксимации, в частности, для приближения планируемых маршрутов движения летательных аппаратов допустимыми траекториями. Другим приложением, развиваемой теории, является приближенное решение задач оптимального управления, когда множество допустимых управлений сужается, например, до класса кусочно-постоянных.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-08-00128а).

Список литературы

1. Бортаковский А.С. Достаточные условия оптимальности управления переключаемыми системами // Известия РАН. Теория и системы управления. 2017. № 4. С.86-103.
2. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973. 446 с.
3. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: ИЛ, 1960. 400 с.
4. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.