

УДК 517.9

# ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕРВНОГО ИМПУЛЬСА

**О.В. Гаврилова**

*Южно-Уральский государственный университет*  
Россия, 454080, Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76  
E-mail: [gavrilovaov@susu.ru](mailto:gavrilovaov@susu.ru)

**Н.А. Манакова**

*Южно-Уральский государственный университет*  
Россия, 454080, Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76  
E-mail: [manakovana@susu.ru](mailto:manakovana@susu.ru)

**Ключевые слова:** полулинейные уравнения соболевского типа, задача оптимального управления, система уравнений Фитц Хью – Нагумо, слабое обобщенное решение.

**Аннотация:** В статье изучается математическая модель распространения нервного импульса в мембране, основанная на системы уравнений Фитц Хью – Нагумо. Рассматривается случай асимптотической устойчивости изучаемой модели в предположении, что скорость изменения одних компонент существенно превосходит скорость других, что в свою очередь приводит к вырожденности системы. Для исследуемой модели рассмотрена задача оптимального управления, где воздействие осуществляется и на медленные, и на быстрые компоненты. В ходе исследования разработан алгоритм численного исследования, в основе которого лежат метод Галеркина, метод декомпозиции, метод Рунге и метод штрафа. В статье также приводятся результаты вычислительного эксперимента.

## 1. Введение

При исследовании взаимодействия двух осциллографов Фитц Хью – Нагумо в работе [1] была получена четырехкомпонентная математическая модель с нелинейным поведением восстанавливающих переменных:

$$(1) \quad \begin{cases} \varepsilon_i v_{it} = \alpha_i \Delta v_i - \beta_{i1} v_1 - \beta_{i2} v_2 - \beta_{i3} v_3 - \beta_{i4} v_4 - \gamma_i v_i^3 + u_i, & i = 1, 2, \\ \varepsilon_i v_{it} = \alpha_i \Delta v_i - \beta_{i1} v_1 - \beta_{i2} v_2 - \beta_{i3} v_3 - \beta_{i4} v_4 + u_i, & i = 3, 4. \end{cases}$$

Здесь  $v_1 = v_1(s, t)$ ,  $v_2 = v_2(s, t)$  – функции, описывающие динамику мембранного потенциала;  $v_3 = v_3(s, t)$ ,  $v_4 = v_4(s, t)$  – медленные восстанавливающие функции, связанные с ионными токами;  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$  – внешнее воздействие, например, разряд электрического тока;  $\beta_{ij}$ ,  $\alpha_i$ ,  $\gamma_i \in \mathbb{R}$ ,  $i, j = \overline{1, 4}$  – фиксированные параметры,

характеризующие порог возбуждения, его скорость, электропроводность и реполяризацию среды.

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  – ограниченная область с гладкой границей класса  $C^\infty$ . Так как скорость изменения компонент  $v_1(s, t)$  и  $v_2(s, t)$  существенно превосходит скорость изменения  $v_3(s, t)$  и  $v_4(s, t)$ , то нами будет рассмотрена вырожденная ( $\varepsilon_i = 1, i = 1, 2, \varepsilon_i = 0, i = 3, 4$ ) система (1) в случае, когда матрица  $D = \{\beta_{ij}\}_{i,j=1}^4$  обладает свойством

$$(2) \quad \exists C_D, C^D > 0 : C_D [x, x] \leq [Dx, x] \leq C^D [x, x]$$

с краевым условием Дирихле

$$(3) \quad v_1(s, t) = 0, v_2(s, t) = 0, v_3(s, t) = 0, v_4(s, t) = 0, (s, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R},$$

и условием Шоултера – Сидорова

$$(4) \quad v_1(s, 0) = v_{1_0}(s), v_2(s, 0) = v_{2_0}(s), s \in \Omega.$$

Модель Фитц Хью – Нагумо исследуется уже более 50 лет и за это время стала базовым примером возбудимой системы. В работе [2] проведен подробный анализ невырожденной системы уравнений Фитц Хью – Нагумо под внешним периодическим воздействием как последовательностью импульсов, так и синусоидальным сигналом на медленные компоненты. В работах [3, 4] проводилось исследование оптимального управления вырожденной двухкомпонентной системы при воздействии на быструю и медленную компоненты. Настоящая работа посвящена изучению задачи оптимального управления решениями задачи Шоултера – Сидорова для четырехкомпонентной математической модели Фитц Хью – Нагумо в слабом обобщенном смысле под внешним воздействием на восстанавливающие и медленные компоненты.

## 2. Задача оптимального управления

Положим  $\mathfrak{H}_i = W_2^1(\Omega)$ ,  $\mathfrak{B}_i = L_4(\Omega)$ ,  $\mathcal{H}_i = L_2(\Omega)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ . Рассмотрим гильбертово пространство  $\mathcal{H} = \prod_{i=1}^4 \mathcal{H}_i$  со скалярным произведением  $[\cdot, \cdot]$ . Определим пространства  $\mathfrak{H} = \prod_{i=1}^4 \mathfrak{H}_i$  и  $\mathfrak{B} = \prod_{i=1}^4 \mathfrak{B}_i$ , а через  $\mathfrak{H}^*$ ,  $\mathfrak{B}^*$  обозначим сопряженные пространства к пространству  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{B}$  относительно скалярного произведения в  $\mathcal{H}$  соответственно. В случае  $n \leq 4$  имеют место плотные и непрерывные вложения

$$\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}^* \hookrightarrow \mathfrak{H}^*,$$

причем вложение  $\mathfrak{H} \hookrightarrow \mathcal{H}$  компактно.

Рассмотрим пространство

$$\mathfrak{X} = \{x = (v_1, v_2, v_3, v_4) \mid v_i \in L_\infty(0, T; \mathfrak{H}_i) \cap L_4(0, T; \mathfrak{B}_i), i = 1, 2; \\ v_i \in L_2(0, T; \mathfrak{H}_i), i = 3, 4\}.$$

**Определение 1.** Вектор-функцию  $x \in \mathfrak{X}$  при  $T \in \mathbb{R}_+$  назовем слабым обобщенным решением задачи Шоултера – Сидорова (1), (3), (4) если она удовлетворяет

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (v_{it} \zeta_i + \alpha_i \nabla v_i \cdot \nabla \zeta_i + \sum_{j=1}^4 \beta_{ij} v_j \zeta_i + \gamma_i v_i^3 \zeta_i) ds dt &= \int_0^T \int_{\Omega} u_i \zeta_i ds dt, \quad i = 1, 2, \\ \int_0^T \int_{\Omega} \left( \alpha_i \nabla v_i \cdot \nabla \zeta_i + \sum_{i=j}^4 \beta_{ij} v_j \zeta_i \right) ds dt &= \int_0^T \int_{\Omega} u_i \zeta_i ds dt, \quad i = 3, 4, \\ \int_{\Omega} (v_i(s, 0) - v_{i0}(s)) \zeta_i(s) ds &= 0, \quad i = 1, 2, \forall \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4) \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$(5) \quad \begin{aligned} J(x, u) &= \sum_{i=1}^2 \vartheta \int_0^T \|v_i - v_{if}\|_{\mathfrak{B}_i}^4 dt + \sum_{i=3}^4 \vartheta \int_0^T \|v_i - v_{if}\|_{\mathfrak{H}_i}^2 dt + \\ &+ (1 - \vartheta) \int_0^T (\|u_1\|_{\mathfrak{B}_1^*}^4 + \|u_2\|_{\mathfrak{B}_2^*}^4 + \|u_3\|_{\mathfrak{H}_3^*}^2 + \|u_4\|_{\mathfrak{H}_4^*}^2) dt \rightarrow \inf, \quad u \in \mathfrak{U}_{ad} \end{aligned}$$

решениями (1), (3), (4), где  $v_f = (v_{1f}, v_{2f}, v_{3f}, v_{4f})$  – требуемое состояние системы. Здесь  $\mathfrak{U}_{ad} \subset \mathfrak{U}$  – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений

$$\begin{aligned} \mathfrak{U} &= \{u = (u_1, u_2, u_3, u_4) : u_i \in L_{\frac{4}{3}}(0, T; \mathfrak{B}_i^*), i = 1, 2, \\ &u_i \in L_2(0, T; \mathfrak{H}_i^*), i = 3, 4\}. \end{aligned}$$

**Определение 2.** Пару  $(\hat{x}, \hat{u}) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$  назовем решением задачи оптимального управления (1), (3) – (5), если  $J(\hat{x}, \hat{u}) = \inf_{(x, u)} J(x, u)$ , где пары  $(x, u) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$  удовлетворяют (1), (3), (4) в слабом обобщенном смысле.

**Теорема 1.** Пусть  $\beta_{ij}, \alpha_i, \gamma, \beta_{ij} \in \mathbb{R}, i, j = \overline{1, 4}, n \leq 4, \varepsilon_i = 1, i = 1, 2, \varepsilon_i = 0, i = 3, 4$  и выполняется условие (2). Тогда при любых  $v_{10} \in \mathfrak{H}_1, v_{20} \in \mathfrak{H}_2, T \in \mathbb{R}_+$  существует решение задачи (1), (3) – (5).

### 3. Алгоритм приближенного решения задачи оптимального управления

Используя теоретические результаты, полученные в работах [3, 5], нами был разработан и реализован алгоритм нахождения приближенного решения задачи оптимального управления (1), (3) – (5) на основе модифицированных методов декомпозиции, штрафа, Галеркина и Ритца. Приведем данный алгоритм на модельном примере, условия для которого были взяты из экспериментальных данных, полученных в работе [1].

**Пример 1.** Требуется найти решение задачи (1), (3) – (5) при следующих условиях:  $\Omega = (0, \pi), \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0, \alpha_1 = 0, 1, \alpha_2 = 0, 05, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0, \beta_{11} = -1, \beta_{22} = -1, \beta_{33} = -1, \beta_{44} = -1, \beta_{12} = 1, \beta_{13} = 0, 5, \beta_{14} = 0, 7, \beta_{21} = 1, \beta_{23} = 0, \beta_{24} = 0, 5, \beta_{31} = 1, \beta_{32} = 0, 03, \beta_{34} = 0, 5, \beta_{41} = 0, 03, \beta_{42} = 0, 5, \beta_{43} = 1, \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{3}, m = 3, T = 1, N = 2, \theta = \frac{1}{2}, \vartheta = \frac{99}{100}, \varepsilon = \frac{1}{100}, v_0(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(s) + \sin(2s)), v_{1f} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t \sin(s) + t^2 \sin(2s)), v_{2f} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(s) + \sin(2s)), v_{3f} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(s) + \sin(2s)), v_{4f} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(s) + \sin(2s)).$

Применяя метод декомпозиции, описанный в работе [5], линеаризуем систему (1) введением функций  $y_i = y_i(s, t)$ ,  $i = 1, 2$ , и получим

$$(6) \quad \begin{cases} \varepsilon_i v_{it} = \alpha_i \Delta v_i - \beta_{i1} v_1 - \beta_{i2} v_2 - \beta_{i3} v_3 - \beta_{i4} v_4 - \gamma_i y_i^3 + u_i, & i = 1, 2, \\ \varepsilon_i v_{it} = \alpha_i \Delta v_i - \beta_{i1} v_1 - \beta_{i2} v_2 - \beta_{i3} v_3 - \beta_{i4} v_4 + u_i, & i = 3, 4, \end{cases}$$

$$(7) \quad v_i = y_i, i = 1, 2.$$

Тогда решение задачи (1), (3) – (5) сведется к отысканию тройки  $(x, y, u)$ , где  $x = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ ,  $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ . Приближенное решение задачи (3), (4), (6), (7), будем искать в виде галеркинских сумм:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_i(s, t) &= \sum_{k=1}^m v_{i,k}(t) \varphi_k(s), \quad i = \overline{1, 4}, \\ \tilde{y}_i(s, t) &= \sum_{k=1}^m y_{i,k}(t) \varphi_k(s), \quad i = 1, 2, \quad \tilde{u}_i(s, t) = \sum_{k=1}^m u_{i,k}(t) \varphi_k(s), \quad i = \overline{1, 4}, \end{aligned}$$

где  $\varphi_k(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(ks)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  – собственные функции однородной задачи Дирихле оператора Лапласа  $\Delta$  в области  $\Omega$ .

Будем искать приближенное решение задачи управления (3) – (6) с помощью метода штрафа, описанного в работе [5]. Рассмотрим эквивалентную задачу управления, где соотношение (7) для приближенного решения достигается с помощью введения функционала штрафа в виде

$$\begin{aligned} J(\tilde{x}, \tilde{u}) &= \sum_{i=1}^2 \vartheta \theta \int_0^T dt \int_{\Omega} (\tilde{v}_i - v_{if})^2 ds + \vartheta \left( \sum_{j=3}^4 \int_0^T dt \int_{\Omega} (\tilde{v}_j - v_{jf})^2 ds + \right. \\ &+ \int_0^T dt \int_{\Omega} |\nabla \tilde{v}_i - \nabla v_{if}| ds \left. + \sum_{i=1}^2 \vartheta (1 - \theta) \int_0^T dt \int_{\Omega} (\tilde{y}_i - v_{if})^2 ds + \right. \\ &+ (1 - \vartheta) \int_0^T dt \int_{\Omega} (\tilde{u}_1^{\frac{4}{3}} + \tilde{u}_2^{\frac{4}{3}} + \tilde{u}_3^2 + \tilde{u}_4^2) ds \left. + \sum_{i=1}^2 r_{\varepsilon} \int_0^T dt \int_{\Omega} (\tilde{v}_i - \tilde{y}_i)^2 ds, \right. \end{aligned}$$

где параметр штрафа  $r_{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow +\infty$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Опираясь на метод Ритца, будем искать неизвестные  $y_{i,k}(t)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $u_{i,k}(t)$ ,  $i = \overline{1, 4}$ , в виде

$$(8) \quad y_{i,k}(t) = \sum_{n=0}^N a_{i,k,n} t^n, \quad i = 1, 2, \quad u_{i,k}(t) = \sum_{n=0}^N b_{i,k,n} t^n, \quad i = \overline{1, 4},$$

учитывая, что

$$y_{i,k}(0) = v_{i,k}(0), \quad i = 1, 2.$$

Подставив галеркинские суммы (8) в уравнения (1) и умножив полученные уравнения скалярно в  $L_2(\Omega)$  на собственные функции  $\varphi_k(s)$ , получим систему алгебро-дифференциальных уравнений. Разрешим получившуюся систему уравнений относительно неизвестных  $a_{i,k,n}$ ,  $b_{i,k,n}$ . Таким образом, задача оптимального управления сводится к нахождению минимума функции нескольких переменных относительно  $b_{k_1, k_2, n}$ ,  $k = 1, \dots, m$ ,  $n = 0, \dots, N$ . В результате вычислений было найдено приближенное решение задачи (1), (3) – (5) (см. рис. 1 – 4), при этом значение функционала  $J = 0,06228939$  (с точностью до  $10^{-8}$ ).

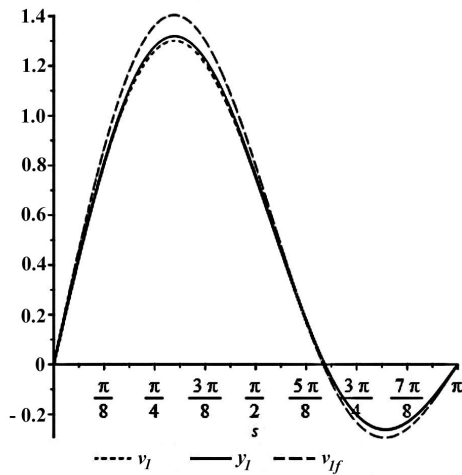


Рис. 1. Графики функций  $v_1(s, 1)$ ,  $v_{1f}(s, 1)$ ,  $y_1(s, 1)$  при  $t = 1$

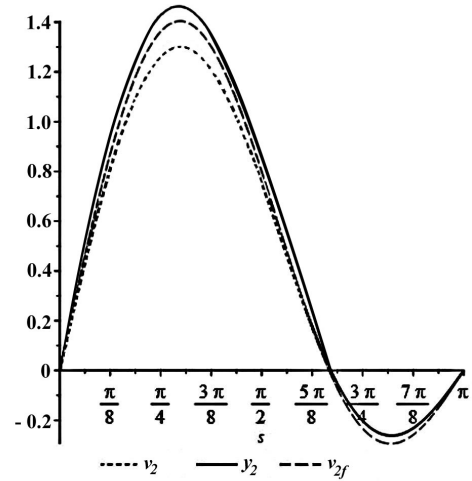


Рис. 2. Графики функций  $v_2(s, 1)$ ,  $v_{2f}(s, 1)$ ,  $y_2(s, 1)$  при  $t = 1$

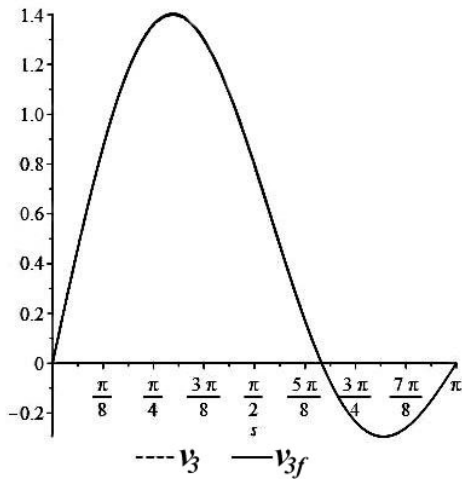


Рис. 3. Графики функций  $v_3(s, 1)$ ,  $v_{3f}(s, 1)$  при  $t = 1$

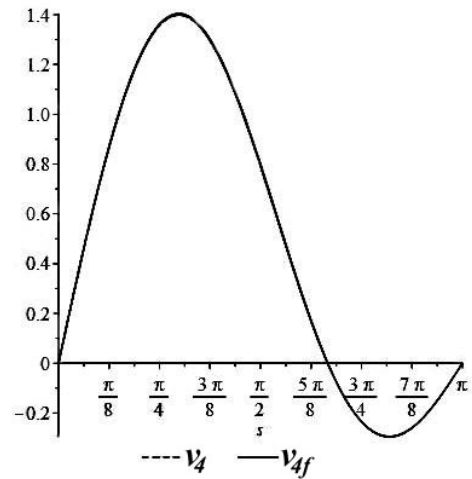


Рис. 4. Графики функций  $v_4(s, 1)$ ,  $v_{4f}(s, 1)$  при  $t = 1$

## Список литературы

1. Nekorkin V.I., Kazantsev V.B. Autowaves and Solitons in a Reaction-Diffusion System // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2002. Vol. 12, No. 11. P. 2421-2434.
2. Croisier H. Continuation and Bifurcation Analyses of a Periodically Forced Slow-Fast System. Liege: Mars. 2009.
3. Manakova N.A., Gavrilova O.V. Optimal Control for a Mathematical Model of Nerve Impulse Spreading // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2015. Vol. 8, No. 4. P. 120-126.
4. Ryll Ch., Lober J., Martens St. et. al. Analytical, Optimal, and Sparse Optimal Control of Traveling Wave Solutions to Reaction-Diffusion Systems // Control of Self-Organizing Nonlinear Systems. 2016. P. 189-210.
5. Manakova N.A. Method of Decomposition in the Optimal Control Problem for Semilinear Sobolev Type Models // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2015. Vol. 8, No. 2. P. 133-138.