УДК 517.977

ФЕНОМЕН СКАЧКА УСЛОВИЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Ю.Э. Даник
Институт системного анализа Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН
Россия, 117312, Москва, 60-летия Октября пр., 9
E-mail: danik@isa.ru

М.Г. Дмитриев
Институт системного анализа Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН
Россия, 117312, Москва, 60-летия Октября пр., 9
E-mail: mdmitriev@mail.ru

Д.А. Макаров
Институт системного анализа Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН
Россия, 117312, Москва, 60-летия Октября пр., 9
E-mail: makarov@isa.ru

Ключевые слова: сингулярные возмущения, малый параметр, скачок в условиях, нелинейные задачи оптимального управления, предельная задача, функционал Майера-Больца, асимптотические методы.

Аннотация: Рассматривается обзор подходов к определению скачка в условиях предельной задачи для сингулярно возмущенных нелинейных задач оптимального управления на конечном интервале без ограничений на управление с критерием Майера-Больца, внеитегральный член которого зависит как от быстрой, так и от медленной переменных, а интегральный – содержит сумму квадратичных форм.

1. Введение

Большую роль для приближенного решения нелинейных задач оптимального управления без ограничений на управление играют различные асимптотические методы, с помощью которых можно получать качественные картины решений и строить приближенные алгоритмы для нахождения глобально оптимальных управлений [1, 2]. При этом, например, если в функционале сингулярно возмущенной задачи есть конечное значение быстрой переменной или в уравнениях состояния для быстрых переменных присутствуют краевые условиях, то в предельной невозмущенной задаче функционал при вырождении, так же как и краевые условия для фазовых переменных, могут претерпевать нетривиальные изменения. Впервые такой эффект продемонстрирован в [3]. Это связано с тем, что при определенных условиях устойчивости в решениях присутствуют зоны быстрого изменения – пограничные слои у траекторий и управлений, на которые в свою очередь могут действовать аппроксимации дельта-функций в управлениях. Эффект скачка условий в предельной задаче может проявиться оригинальным образом. Например, для задачи оптимального управления с интегро-дифференциальными связями, где уравнения состояния есть сингулярно возмущенные интегро-дифференциальные уравнения [4], а оптимальные обратные связи могут содержать большие коэффициенты усиления, то в предельной задаче может измениться ядро интегрального оператора. Впервые эффект нетривиального изменения ядра интегрального оператора продемонстрирован в [5, 6].

Если обоснование скачков условий при вырождении в линейных задачах с ограничениями на управление проводится с помощью асимптотических свойств множеств достижимости [7, 8], то в общей нелинейной постановке при отсутствии ограничений на управления можно использовать два подхода для обоснования устойчивости по функционалу (предельного перехода оптимального значения функционала возмущенной задачи к оптимальному значению функционала в предельной, вырожденной задаче), тождественность результатов которых устанавливалась в литературе для различных вариационных задач [9, 10]. Первый подход [11] связан с обоснованием близости экстремалей Понтрягина в обеих задачах, а второй – следует из прямой схемы построения асимптотического решения возмущенных вариационных задач [12-13], связанной с прямой постановкой постулируемых асимптотических разложений в условия возмущенной вариационной задачи, их разложением и последующим решением возникающих задач оптимизации. Заканчивая краткий обзор работ по скачку в условиях вариационных задач, также отметим здесь работу [14], где рассматривается задача оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества для линейной системы с быстрыми и медленными переменными. Решение ищется в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими ограничениями на управление и функционалом качества, где терминальная часть зависит не только от медленных, но и от быстрых переменных. Здесь по параметру сингулярных возмущений строится асимптотика решения, имеющая степенной характер.

2. Устойчивость по сингулярным возмущениям для частного класса сингулярно возмущенных управляемых систем с коэффициентами, зависящими от состояния

Здесь рассматривается устойчивость по сингулярным возмущениям для частного класса сингулярно возмущенных управляемых систем с коэффициентами, зависящими от состояния (SDC систем)

$$\begin{aligned} &\dot{x} = A_1(x)x + A_2(x)y + B_1(x)u,\ x(0) = x^0,\ x \in R^n,\\ &\varepsilon\dot{y} = A_3(x)x + A_4(x)y + B_2(x)u,\ y(0) = y^0,\ y \in R^m,\\ &z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in R^{n+m},\ t \in [0,T],\ \ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0. \end{aligned} \tag{1}$$

Вдоль траекторий системы (1) требуется минимизировать функционал Майера-Больца

$$J_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} z^T(T)Fz(T) + \frac{1}{2}\int_0^T \left(z^T Q(x) z + u^T R u \right) dt \to \min, \tag{2}$$

где

$$F=\begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_2^T & F_3 \end{bmatrix}\geq 0,\ F_3>0\,,\ Q\left(x\right)=\begin{pmatrix} Q_1(x) & Q_2(x) \\ Q_2^T(x) & Q_3(x) \end{pmatrix}.$$

Вырожденная система при $\varepsilon=0$ имеет вид

$$\dot{\hat{x}}=A_1\hat{x}+A_2\hat{y}+B_1\hat{u},\ 0=A_3\hat{x}+A_4\hat{y}+B_2\hat{u},\ \exists A_4^{-1},$$

$$\hat{y}=-A_4^{-1}A_3\hat{x}-A_4^{-1}B_2\hat{u},$$

или

(3) $$\dot{\hat{x}}=(A_{10}-A_{20}A_{40}^{-1}A_{30})\hat{x}+(B_{10}-A_{20}A_{40}^{-1}B_{20})\hat{u},\ \hat{x}(0)=x^0,\ \hat{x}\in R^n.$$

Рассмотрим критерий качества в предельной задаче

$$J_0\left(\hat{u}\right)=\hat{x}(T)F_1\hat{x}(T)+\hat{y}(T)F_2^T\hat{x}(T)+\hat{x}(T)F_2\hat{y}(T)+\hat{y}(T)F_3\hat{y}(T)+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^T\Bigg(\hat{x}^T(t)\bigg(Q_{10}-A_{30}^T\left(A_{40}^{-1}\right)^TQ_{20}^T-Q_{20}A_{40}^{-1}A_{30}+A_{30}^T\left(A_{40}^{-1}\right)^TQ_{30}A_{40}^{-1}A_{30}\bigg)\hat{x}(t)-$$
$$-\hat{u}^T(t)B_{20}^T\left(A_{40}^{-1}\right)^TQ_{20}^T\hat{x}(t)+\hat{u}^T(t)B_{20}^T\left(A_{40}^{-1}\right)^TQ_{30}A_{40}^{-1}A_{30}\hat{x}(t)-$$
$$-\hat{x}^T(t)Q_{20}A_{40}^{-1}B_{20}\hat{u}(t)+\hat{x}^T(t)A_{30}^T\left(A_{40}^{-1}\right)^TQ_{30}A_{40}^{-1}B_{20}\hat{u}(t)+$$
$$+\hat{u}^T(t)\bigg(B_{20}^T\left(A_{40}^{-1}\right)^TQ_{30}A_{40}^{-1}B_{20}+R\bigg)\hat{u}(t)\Bigg)dt\to\min_{\hat{u}}.$$

Обозначим $\varphi(\hat{x}(T),\hat{y}(T))=\hat{x}(T)F_1\hat{x}(T)+\hat{y}(T)F_2^T\hat{x}(T)+\hat{x}(T)F_2\hat{y}(T)+\hat{y}(T)F_3\hat{y}(T)$.

По прямой схеме [12-13] внеинтегральный член изменяется независимо от интегрального и поэтому получаем $y^*=\arg\min_y\varphi(\hat{x}(T),y)$, т.е. в предельной задаче критерий имеет вид (4)

(4) $$J_0(\hat{u})=\varphi(\hat{x}(T),y^*)+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^T\hat{x}^T(t)\bigg(Q_{10}-A_{30}^T\left(A_{40}^{-1}\right)^TQ_{20}^T-Q_{20}A_{40}^{-1}A_{30}+$$
$$+A_{30}^T\left(A_{40}^{-1}\right)^TQ_{30}A_{40}^{-1}A_{30}\bigg)\hat{x}(t)-\hat{u}^T(t)B_{20}^T\left(A_{40}^{-1}\right)^TQ_{20}^T\hat{x}(t)+$$
$$+\hat{u}^T(t)B_{20}^T\left(A_{40}^{-1}\right)^TQ_{30}A_{40}^{-1}A_{30}\hat{x}(t)-\hat{x}^T(t)Q_{20}A_{40}^{-1}B_{20}\hat{u}(t)+$$
$$+\hat{x}^T(t)A_{30}^T\left(A_{40}^{-1}\right)^TQ_{30}A_{40}^{-1}B_{20}\hat{u}(t)+$$
$$+\hat{u}^T(t)\bigg(B_{20}^T\left(A_{40}^{-1}\right)^TQ_{30}A_{40}^{-1}B_{20}+R\bigg)\hat{u}(t)\bigg)dt\to\min_{\hat{u}},$$

где $\varphi(\hat{x}(T),y^*)=\hat{x}(T)(F_1-F_2^TF_3^{-1}F_2)\hat{x}(T)$, т.е. вид $\varphi(\hat{x}(T),y^*)$ не связан с подстановкой корня $\hat{y}$ или части его во внеинтегральный член.

3. Заключение

Рассмотрен обзор подходов к определению скачка в условиях предельной задачи для сингулярно возмущенных нелинейных задач оптимального управления на конечном интервале без ограничений на управление с критерием Майера-Больца, внеитегральный член которого зависит как от быстрой, так и от медленной переменных, а интегральный – содержит сумму квадратичных форм. Для задачи оптимального управления сингулярно возмущенной системой, формально линейной по переменным состояния и управлению с коэффициентами, зависящими от медленной переменной, показано, что в предельной задаче внеинтегральный член не связан с подстановкой быстрой переменной во внеинтегральный член исходной задачи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (17-29-07053 офи_м).

Список литературы

1. Горнов А.Ю., Дмитриев М.Г., Тятюшкин А.И. Опыт решения задач оптимального управления с пограничным слоем // ДЕП ВИНИТИ. № 8441-В85.
2. Дмитриев М.Г., Курина Г.А. Сингулярные возмущения в задачах управления. Обзор 1982-2004 гг. // Автоматика и телемеханика. 2006. №1. С. 3-53.
3. Дмитриев М.Г. О непрерывности решения задачи Майера по сингулярным возмущениям // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1972. Vol. 12, No. 3. P. 788-791.
4. Гусейнов Т.Г. Об асимптотике и некоторых ее особенностях решения задачи оптимального управления для сингулярно возмущенной системы интегро-диффереционных уравнений. Канд.диссертация. Баку: Азерб.ун-т, 1981.
5. Бутузов В.Ф. Асимптотика решения одной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с малым параметром при производной // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 3. С. 491-507.
6. Бутузов В.Ф. К вопросу об асимптотике решений интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при производной // Дифференц. уравнения. 1966. Т. 2, № 3. С. 391-406.
7. Dontchev A.L., Veliov V.M. Singular perturbation in Mayer’s problem for linear systems // SIAM Journal on Control and Optimization. 1983. Vol. 21, No. 4. P. 566-581.
8. Veliov V.M., Donchev A.L. Continuity of a family of trajectories of the linear-control systems with respect to singular perturbations // Doklady Akademii Nauk SSSR. 1987. Vol. 293, No. 2. P. 274-278.
9. Kokotovic P.V., Khalil H.K., O'Reilly J. Singular perturbation methods in control: Analysis and applications. London: Academic Press Inc, 1986.
10. Кань Ни Минь, Васильева А.Б., Дмитриев М.Г. Эквивалентность двух множеств точек перехода, отвечающих решениям с внутренними переходными слоями // Математические заметки. 2006. Т. 79, № 1. С. 120-126.
11. Дмитриев М.Г. Теория сингулярных возмущений и некоторые задачи оптимального управления // Дифференциальные уравнения. 1985. С. 1693-1698.
12. Belokopytov S.V., Dmitriev M.G. Direct scheme in optimal control problems with fast and slow motions // Systems and Control Letters. 1986. Vol. 8, No. 2. P. 129-135.
13. Белокопытов С.В., Дмитриев М.Г. Прямой метод решения задач оптимального управления с быстрыми и медленными движениями // Изв. АН СССР. Техн. Кибернетика. 1985. №3. С. 147-152.
14. Данилин А.Р., Шабуров А.А. Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества, терминальная часть которого зависит от медленных и быстрых переменных // Материалы Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения Льва Семеновича Понтрягина – Оптимальное управление и дифференциальные игры. Москва, Россия, 2018. С. 76-77.