

# ПРИМЕНЕНИЕ СОВРЕМЕННОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ К ЗАДАЧАМ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

**А.Я. Красинский**

*Московский государственный университет пищевых производств*  
Россия, 125080, город Москва, Волоколамское шоссе, д. 11  
E-mail: [krasinsk@mgupp.ru](mailto:krasinsk@mgupp.ru)

**А.А. Юлдашев**

*Московский авиационный институт*  
Россия, 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4  
E-mail: [izzvms@gmail.com](mailto:izzvms@gmail.com)

**Ключевые слова:** манипулятор, неполная информация, стабилизация, устойчивость.

**Аннотация:** В задачах управления при неполной информации о состоянии математическая модель применяется не только на этапе определения коэффициентов управления и системы оценивания. Модель используется для оценки текущего состояния объекта путем обработки информации о разнице между измеренным сигналом из объекта и соответствующим сигналом из системы оценивания. В работе стандартное программное обеспечение применяется для получения компьютерной модели объекта и проведения компьютерного моделирования его динамики не только для определения его конструктивных параметров, но и выбора наиболее рациональных вариантов приложения управления и состава вектора измерений. Этот подход применен к решению задачи стабилизации движения манипулятора с геометрической связью. Строгими методами построена нелинейная модель системы с учетом динамики электроприводов. Исследование осложнено наличием нулевого корня в замкнутой системе при любом управлении. Коэффициенты стабилизирующего управления и системы оценивания определены методом Н.Н. Красовского из соответствующих линейно-квадратичных задач для выделяемой из нелинейной модели линейной управляемой подсистемы. Их численные значения найдены решением соответствующих алгебраических уравнений Риккати с использованием программного модуля `sage` (a, b, q, r) пакета MATLAB. Приведены графики переходных процессов для трех вариантов управления и двух вариантов измерения.

В случае неполной информации наличие математической модели является необходимым условием практического применения теории управления. Манипуляторы, используемые для автоматизации в различных отраслях промышленности, являются одним из наиболее распространенных типов автоматических устройств. Несмотря на интенсивные исследования по моделированию кинематики и динамики манипуляторов [1, 2], разработка математических и компьютерных моделей в задачах устойчивости и стабилизации остается одной из важнейших задач. При применении строгих методов построения математических моделей сложных объектов достаточно полное исследование их динамики может быть выполнено с использованием широко распространенного программного обеспечения. Для реализации предлагаемого подхода рассмотрим манипулятор, схематично показанный на рис. 1. Манипулятор имеет две степени свободы и

два привода P1 и P2. В отличие от ранее проведенных исследований оба привода будут задействованы поочередно, а затем оба одновременно.

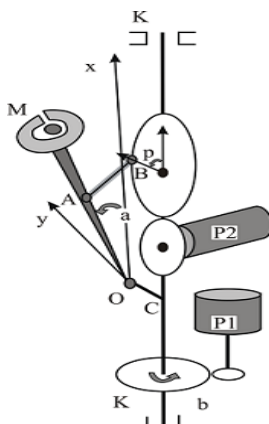


Рис. 1. Схема манипулятора.

Конфигурация механической части этой системы может быть определена тремя параметрами:  $a$  - угол наклона звена OM манипулятора относительно оси OX,  $b$  - угол поворота звена ОС манипулятора вокруг оси КК и  $p$  - угол поворота выходного вала привода P2. Аэрограф или другой рабочий инструмент массой  $m$  удерживается в механическом захвате М. Рабочий режим манипулятора - это вращение с постоянной угловой скоростью вокруг оси КК при заданном угле  $a$  между рычагом OM и осью OX. Массы звена OM и шатунов ОС и АВ для упрощения модели не учтены. Предположим, что центры масс приводного механизма P2 расположены на оси КК. Приведенные моменты инерции при вращении вокруг оси КК и оси привода P2 обозначены соответственно  $J_b$  и  $J_p$ . В точках А, В, О установлены плоские шарниры, в точке С жесткое соединение. Обозначения для длин  $D = OA$ ,  $h = MA$ ,  $l = AB = OC$  и  $d$  - радиус выходного колеса редуктора привода P2. В приводах используются коллекторные двигатели постоянного тока с независимым возбуждением. Система имеет одну позиционную координату  $a$ , одну циклическую координату  $b$  и одну избыточную координату  $p$ , поскольку имеет место геометрическая связь

$$(1) \quad (D(\cos a - 1) + d(1 - \cos p))^2 + (D \sin a + l - d \sin p)^2 = l^2,$$

дифференцируя (1) по времени для угловой скорости  $\dot{p}$  получим

$$(2) \quad \dot{p} = B(a, p)\dot{a}; \quad B(a, p) = \frac{D(d \sin(a-p) + (D-d) \sin a + l \cos a)}{d(D \sin(a-p) + (D-d) \sin p + l \cos p)} \dot{a}.$$

Кинетическую и потенциальную энергии системы с учетом (2) можно записать в виде

$$(3) \quad T^* = \left( \frac{m}{2} (l + (D + h) \sin a)^2 + \frac{J_b}{2} \right) \dot{b}^2 + \frac{J_p}{2} B^2(a, p) \dot{a}^2 + \frac{1}{2} m (D + h)^2 \dot{a}^2, \quad \Pi = mg(D + h) \cos a.$$

На систему действуют неконсервативные силы,

$$\tilde{Q}_p = -f_p \dot{p} + k_2^p i_p, \quad \tilde{Q}_b = -f_b \dot{b} + k_2^b i_b,$$

где  $k_2^b, k_2^p$  - электромеханические постоянные двигателей привода постоянного тока,  $f_p, f_b$  - коэффициенты сопротивления вращению. Используя обозначение  $L^* = T^* - \Pi$  для функции Лагранжа, запишем уравнения движения в форме М.Ф. Шульгина [3] и второй закон Кирхгофа для якорных обмоток двигателей [4]:

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{a}} - \frac{\partial L^*}{\partial a} = B(a, p) \left( \frac{\partial L^*}{\partial p} + \tilde{Q}_p \right), \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{b}} = \tilde{Q}_b,$$

$$(5) \quad I_b \frac{di_b}{dt} + R_b i_b + k_1^b \dot{b} = e_b, \quad I_p \frac{di_p}{dt} + R_p i_p + k_1^p B(a, p) \dot{a} = e_p.$$

Здесь  $e_b, e_p$  - напряжения, подаваемые на якорные обмотки,  $k_1^b, k_1^p$  - коэффициенты противо-ЭДС,  $I_b, I_p$  - индуктивности якорных обмоток, якоря,  $R_b, R_p$  - их сопротивле-

ния,  $i_b, i_p$  токи якорных обмоток. Математическая модель динамики системы состоит из уравнений (2), (4), (5). Система может совершать стационарное движение

$$(6) \quad a = a_0 = \text{const}, p = p_0 = \text{const}, \dot{b} = \dot{b}_0 = \text{const}.$$

Подставив (6) в (4), (5), получим значения всех параметров движения (6)

$$\begin{aligned} p = p_0 = \text{const}, c_1 \sin p_0 + c_2 \cos p_0 = c_3, c_1 = d \cos a_0 - d + d^2/D, \\ c_3 = D + d^2/D - \cos a_0 (D - d) - d + l \sin a_0, c_2 = d \sin a_0 + dl/D, \\ i_p = i_{p0} = -1/k_2^p B(a_0, p_0) \{mg(D + h) \sin a_0 + \dot{b}_0^2 m [l + (D + h) \sin a_0] (D + \\ + h) \cos a_0\} = \text{const}, \\ i_b = i_{b0} = f_b \dot{b}_0 / k_2^b = \text{const}, e_p = e_{p0} = R_p i_{p0}, e_b = e_{b0} = R_b i_{b0} + k_1^b \dot{b}_0. \end{aligned}$$

Исследуемая система имеет два привода, оба могут быть включены. Рассмотрим поочередно возможные варианты приложения управляющих воздействий, за которые в задаче стабилизации движения (5) приняты якорные напряжения, дополнительные к постоянным напряжениям  $e_{p0}, e_{b0}$ , обеспечивающим существование невозмущенного движения (5). В первом варианте на якорь двигателя привода Р2 подается только постоянное напряжение  $e_{p0}$ , активно работает привод Р1. Введем возмущения и управление

$$\begin{aligned} a = a_0 + x_1, \dot{a} = x_2, \dot{b} = \dot{b}_0 + x_3, i_b = i_{b0} + x_4, \\ i_p = i_{p0} + x_5, p = p_0 + x_6, e_b = e_{b0} + u. \end{aligned}$$

Подробное математическое и компьютерное моделирование динамики манипулятора при таком варианте управления рассматривалось ранее [5, 6], причем коэффициенты управления определялись за счет перехода от алгебраического матричного уравнения Ляпунова-Беллмана-Риккати [7] к системе нелинейных дифференциальных уравнений, которая была решена с использованием метода Рунге-Кутты. В данной работе при компьютерном моделировании динамики рассматриваемой системы и для определения коэффициентов управлений, и параметров системы оценивания использован программный модуль `care` ( $a, b, c, r$ ) пакета MATLAB. При этом, в отличие от [5, 6], будут исследованы все варианты реализации управлений при неполной информации о состоянии. Для численного моделирования рассмотрен манипулятор со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} m = 1,0 \text{ кг}, \\ g = \frac{9,8 \text{ м}}{\text{сек}^2}, a = 0,1 \text{ рад}, l = 0,3 \text{ м}, D = 0,6 \text{ м}, h = 0,3 \text{ м}, \\ b_0 = \frac{10 \text{ рад}}{\text{сек}}, d = 0,2 \text{ м}, J_p = 0,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, J_b = 0,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ f_p = 0,02, k_2^b = 0,2, k_2^p = 0,2, k_1^b = 0,02, k_1^p = 0,02, \\ I_b = 0,002 \text{ Гн}, I_p = 0,002 \text{ Гн}, f_b = 0,02, R_b = 10 \text{ ом}, R_p = 10 \text{ ом}. \end{aligned}$$

После приведения к нормальной форме первого приближения уравнений возмущенного движения в векторно-матричном виде [5,6] и выполнения неособенной линейной замены для выделения нулевого корня

$$x_6 = z + B(a_0, p_0)x_1,$$

в качестве линейной управляемой подсистемы получим

$$(7) \quad \dot{x} = Mx + N_1 u, x' = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), N'_1 = (0, 0, 0, 0, \pi), u_1 = K_1 x.$$

Компоненты матриц известным образом [5-6] выражены через параметры системы. Графики переходных процессов по угловым скоростям приведены на рис. 2 и рис. 3:

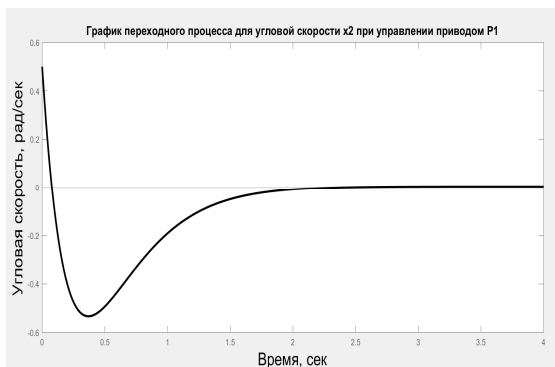


Рис. 2.

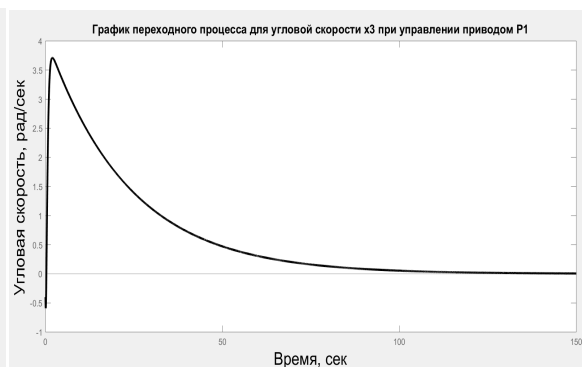


Рис. 3.

Рассмотрим возможность стабилизации движения (6) другим способом. Теперь управляющее напряжение подается на привод P2. Тогда вместо системы (7) получим

$$\dot{x} = Mx + N_2 u, x' = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), N'_2 = (0, 0, 0, \pi, 0), u = K_2 x.$$

Соответствующие графики приведены на рис. 4 и рис. 5.

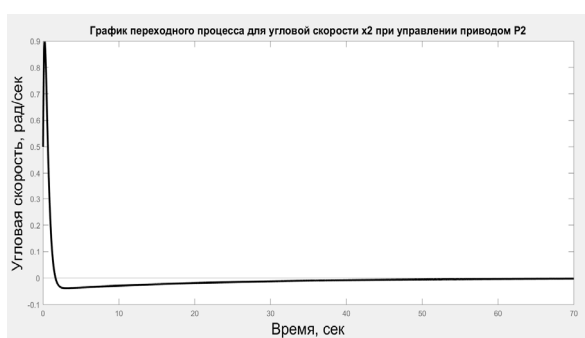


Рис. 4.

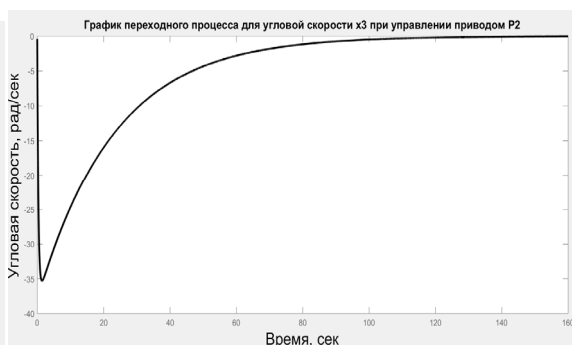


Рис. 5.

В третьем варианте приложения управления активированы оба привода, вместо (7) имеем

$$\dot{x} = Mx + N_3 u, x' = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), N'_3 = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & \pi, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \pi \end{pmatrix}, u = K_3 x.$$

Соответствующие графики приведены на рис. 6 и рис. 7.

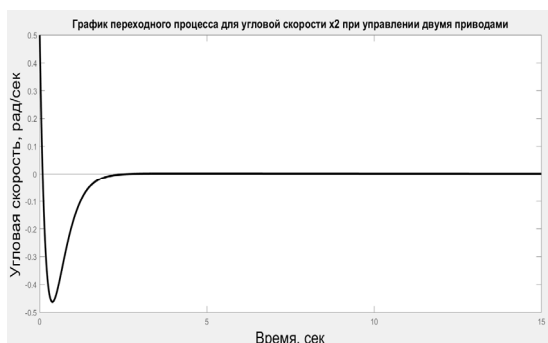


Рис. 6.

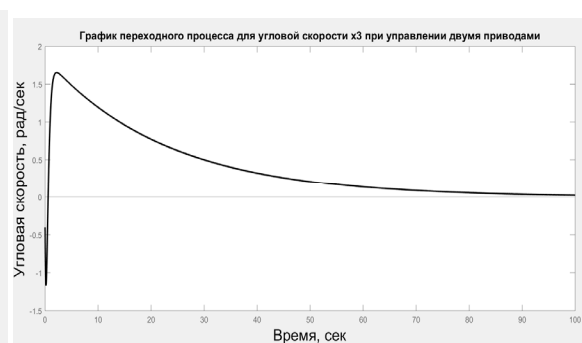


Рис. 7.

Рассмотрим задачу определения параметров системы оценивания фазового состояния объекта при двух вариантах состава вектора измерений:

$$\dot{x}_s = Mx_s - L_s(C_s x_s - \sigma_s) + N_k u_k, k = 1, 2, 3, s = 1, 2$$

$$\sigma_s = C_s x, C'_1 = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0), C'_2 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1), s = 1, 2.$$

Компоненты матриц  $L_s$  могут быть определены применением модуля `care` ( $a$ ,  $b$ ,  $q$ ,  $r$ ) для решения соответствующих линейно-квадратичных задач для дуальных систем

$$\dot{\mu} = M'\mu + C_s'w_s, w_s = L_s\mu.$$

При измерении только возмущений угловой скорости вращения вала КК получаем

$$L_1' = (-2,1895 \quad -7,4967 \quad 12,6985 \quad -0,0254 \quad 0,8096).$$

При измерении силы тока в приводе P1 имеем следующие значения компонент

$$L_2' = (320,74385 \quad 1092,14342 \quad -3410,72941 \quad 6,81691 \quad -117,95856),$$

При найденных компонентах матриц в полной замкнутой системе

$$\dot{x} = Mx + N_k\hat{u}_k, \sigma = C_sx, s = 1,2,$$

$$\dot{x}_s = M\hat{x}_s - L_s(C_s\hat{x}_s - \sigma_s) + N_k\hat{u}_k, \hat{u}_k = K_k\hat{x}_s, k = 1,2,3,$$

получим асимптотическую устойчивость.

## Список литературы

1. Junming Xiao, Wei Han, Aihui Wang. Simulation research of a six degrees of freedom manipulator kinematics based On MATLAB toolbox // 2017 International Conference on Advanced Mechatronic Systems (ICAMechS): 6-9 December 2017. IEEE Xplore.
2. Матюхин В.И. Управление механическими системами. М.: Физматлит, 2009.
3. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании. Ташкент: Изд-во САГУ, 1958.
4. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004.
5. Krasinsky A.Ya., Krasinkaya E.M., Ilyina A.N. About Mathematical Models of System Dynamics with Geometric Constraints in Problems of Stability and Stabilization by Incomplete State Information // International Robotics & Automation Journal. 2017. Vol. 2, No. 1. 00007. DOI: 10.15406/iratj.2017.06.00007.
6. Krasinsky A.Ya., Krasinkaya E.M. Modeling of Dynamics of Manipulators with Geometrical Constraints as a Systems with Redundant Coordinates // International Robotics & Automation Journal. 2017. Vol. 3, No. 3. 00056. DOI: 10.15406/iratj.2017.03.00056.
7. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. С. 475-514.