УДК 517.977

МЕТОД УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКИХ ПО СОСТОЯНИЮ ДНС С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ КРИТЕРИЯМИ

И.В. Расина

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

Россия, 152021, Ярославская область, Переславский район, с. Веськово, ул. Петра Первого, д. 4 «а».

E-mail: irinarasina@gmail.com

О.В. Даниленко

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: ol.baturina@mail.ru

Ключевые слова: дискретно-непрерывные системы, оптимальное управление, достаточные условия оптимальности, метод улучшения управления, задачи управления.

Аннотация: Рассматриваются линейно-квадратические по состоянию дискретно-непрерывные системы (ДНС) для случая, когда все однородные подсистемы нижнего уровня не только связаны общим функционалом, но имеют и свои собственные цели. Для указанного класса на основе аналога достаточных условий оптимальности типа Кротова строится метод улучшения управления и приводится иллюстративный пример.

1. Линейно-квадратические по состоянию дискретно-непрерывные процессы

Модель ДНС представляет собой двухуровневую управляемую систему вида:

$$x^0(k+1) = x^0(k) + \frac{1}{2}a(k)|x|^2 + b(k,u), \quad a,\ b \geqslant 0, \quad x^0 \in \mathbb{R},$$

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k,u), \quad x \in \mathbb{R}^{m(k)},$$

$$k \in \mathbf{K} = \{k_I, k_I+1, ..., k_F\}, \quad u \in \mathbf{U}(k,x) \subset \mathbb{R}^{r(k)},$$

где k — номер шага (этапа), $\mathbf{U}(k,x)$ — заданное при каждом k и x множество, $A(k)$ $B(k,u)$ — матрицы размеров $m(k)\times m(k)$, $m(k)\times 1$ соответственно.

На некотором подмножестве $\mathbf{K}' \subset \mathbf{K}$, $k_F \notin \mathbf{K}'$ действует непрерывная система нижнего уровня

$$\dot{x}^{c0} = \frac{1}{2}a^c(t)|x^c|^2 + b^c(t,u^c), a^c \geqslant 0, \quad x^{c0} \in \mathbb{R},$$

$$\dot{x}^c = A^c(k,t)x^c + B^c(k,t,u^c), \quad x^c \in \mathbb{R}^{n(k)}, \quad t \in \mathbf{T}\,(z) = [t_I(z), t_F(z)],$$

$$x^c \in \mathbf{X}^c(z,t) \subset \mathbb{R}^{n(k)}, \quad u^c \in \mathbf{U}^c\left(z,t,x^d\right) \subset \mathbb{R}^{p(k)},$$

где $A^c(k,t)$, $B^c(k,t,u^c)$ — матрицы размеров $n(k) \times n(k)$, $n(k) \times 1$, и для которой на отрезке $[t_I(z), t_F(z)]$ задана промежуточная цель в виде функционала:

$$I^k = \int\limits_{\mathbf{T}(z(k))} (a^{0\mathrm{T}}(k)x^c + b^0(k,u^c) + \frac{1}{2}a^{1c}(t)|x^c|^2 + b^{1c}(t,u^c))dt \to \inf.$$

При этом оператор правой части дискретной системы имеет вид $x^0(k+1) = x^0(k) + \frac{1}{2}\beta(k)|x_F^c|^2, x(k+1) = \theta(k)x^c(k,t_F)$, $k \in \mathbf{K}'$, $x^c(k,t_I) = \xi(k)x$, $x^{0c}(k,t_I) = \frac{1}{2}\xi^1(k)|x|^2$, где через ξ, θ, β обозначены матрицы соответствующих размеров. Здесь $z = (k,x)$ — совокупность переменных верхнего уровня, играющая на нижнем уровне роль параметров.

Решением этой двухуровневой системы считается набор $m = (x^0(k), x(k), u(k))$, где при $k \in \mathbf{K}'$: $u(k) = \left(u^d(k), m^c(k)\right)$, $m^c(k) \in \mathbf{D}^c\,(z(k))$, (называемый *дискретно-непрерывным процессом*), где $m^c(k)$ — непрерывный процесс $(x^{c0}, x^c(k,t), u^c(k,t))$, $t \in \mathbf{T}(z(k))$, а $\mathbf{D}^c(z)$ — множество допустимых процессов m^c, удовлетворяющих указанной дифференциальной системе при кусочно-непрерывных $u^c(k,t)$ и кусочно-гладких $x^c(k,t)$ (на каждом дискретном шаге k). Совокупность элементов m, удовлетворяющих всем вышеперечисленным условиям, обозначим через $\mathbf{D}$ и назовем множеством допустимых дискретно-непрерывных процессов.

Рассматривается задача о поиске минимума на $\mathbf{D}$ функционала $I = l^{\mathrm{T}}x\,(k_F) + \frac{1}{2}\kappa|x(k_F)|^2 + d$, где l — вектор, κ — матрица, d — константа, при фиксированных $k_I = 0$, $k_F = K$, $x\,(k_I)$ и дополнительных ограничениях $x(k) \in \mathbf{X}(k)$, $x^c \in \mathbf{X}^c\,(z,t)$, $\mathbf{X}(k)$, $\mathbf{X}^c\,(z,t)$ — заданные множества.

2. Метод улучшения и алгоритм

Для построения метода воспользуемся достаточными условиями оптимальности [1], принципами расширения [2] и локализации [3]. Предположим также, что $\mathbf{U}(k,x) = \mathbb{R}^{r(k)}$, $\mathbf{U}^c\left(z,t,x^d\right) = \mathbb{R}^{p(k)}$.

Рассмотрим вспомогательный функционал

$$I_\alpha = L_\alpha = \alpha I + \frac{1}{2}\,(1-\alpha)\Big(\sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'\setminus k_F} |\Delta u\,(k)\,|^2 + \sum_{\mathbf{K}'}\int\limits_{\mathbf{T}(z)} |\Delta u^c\,(k,t)\,|^2 dt\Big),$$

где $\alpha \in [0,1]$,

и его приращение:

$$\Delta L_\alpha \approx G_x^{\mathrm{T}}\Delta x - \sum_{\mathbf{K}\setminus\mathbf{K}'}(R_x^{\mathrm{T}}\Delta x + R_u^{\mathrm{T}}\Delta u + \frac{1}{2}\Delta u^{\mathrm{T}} R_{uu}\Delta u) - \sum_{\mathbf{K}'}\Big((G_x^{c\mathrm{T}}\Delta x + G_{x_F^c}^{c\mathrm{T}}\Delta x_F^c) -$$

$$-\int\limits_{\mathbf{T}(k,z)} (R_x^{c\mathrm{T}}\Delta x + R_{x^c}^{c\mathrm{T}}\Delta x^c + R_{u^c}^{c\mathrm{T}}\Delta u^c + \frac{1}{2}\Delta u^{c\mathrm{T}} R^c_{u^c u^c}\Delta u^c)dt\Big),$$

где R, G, R^c, G^c, L — конструкции достаточных условий оптимальности [1], а $\Delta u = u - u^{\mathrm{I}}$, $\Delta u^c = u^c - u^{c\mathrm{I}}$, $\Delta x = x - x^{\mathrm{I}}$, $\Delta x^c = x^c - x^{c\mathrm{I}}$, $m^{\mathrm{I}} = (u^{c\mathrm{I}}, x^{\mathrm{I}}, u^{c\mathrm{I}}, x^{c\mathrm{I}})$ – заданный элемент из клсса D. Предположим, что матрицы R_{uu} и $R^c_{u^c u^c}$ отрицательно определены (этого всегда можно добиться за счет выбора параметра α [3] и найдем минимум ΔL_α по $\Delta u, \Delta u^c, \Delta x,\ \Delta x^c_F,\ \Delta x^c$. При этом зададим функции φ, φ^c в виде:

$$\varphi = \psi^{\mathrm{T}}(k)\, x(k) + \frac{1}{2}\Delta x^{\mathrm{T}}(k)\, \sigma(k)\, \Delta x(k) + x^0,$$

$$\varphi^c = \psi^{c\mathrm{T}}(k,t)\, x^c(k,t) + \frac{1}{2}\Delta x^{c\mathrm{T}}(k,t)\, \sigma^c(k,t)\, \Delta x^c(k,t) - x^{c0},$$

где ψ, ψ^c — вектор-функции, а $\sigma,\ \sigma^c$ — матрицы соответствующих размеров.

Тогда из сформулированных условий получим:

$$\Delta u = -R_{uu}^{-1} R_u,\ \Delta u^c = -R^{c-1}_{u^c u^c} R^c_{u^c},$$

$$\begin{aligned}
&\psi(k_F) = -\alpha l,\ \psi(k) = A(k)^{\mathrm{T}}\psi(k+1) + A(k)^{\mathrm{T}}\sigma(k+1)B(k),\\
&\sigma(k) = A(k)^{\mathrm{T}}\sigma(k+1) - a(k),\ k \in \mathbf{K}\backslash\mathbf{K}',\ \sigma(k_F) = -\kappa,\\
&\psi(k) = \xi^{\mathrm{T}}\psi^c(k,t_I),\ \psi^c(k,t_F) = \theta_{x^c_F}\psi(k+1) = H_{x^c_F},\\
&\sigma(k) = \sigma^c(t_I)\xi - \xi^1,\ \sigma^c(t_F) = \theta^{\mathrm{T}}_{x^c_F}\sigma(k+1) + \beta,\ k \in \mathbf{K}'\\
&\dot\psi^c(k,t) = -A(k,t)^{c\mathrm{T}}\psi^c - \sigma^c B^c(k,t) - a^0,\\
&\dot\sigma^c = -A(k,t)^{c\mathrm{T}}\sigma^c - a^c(k,t) - a^{1c}(k,t).
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
&H(k,x,u,\psi(k+1)) = \psi^{\mathrm{T}}(k+1)(A(k)x(k) + B(k,u)) - b(k)-\\
&-\frac{1}{2}(1-\alpha)|\Delta u|^2,\ k \in \mathbf{K}\backslash\mathbf{K}'\backslash k_F,\\
&H^c(k,t,x,x^c,u^c,\psi^c(k,t)) = \psi^{c\mathrm{T}}(k,t)(A^c(t)x^c + B^c(t,u^c))-\\
&-(a^{0\mathrm{T}}(k)x^c + b^0(k,u^c)) - b^{1c}(k,u^c) - \frac{1}{2}(1-\alpha)|\Delta u^c(k,t)|^2.
\end{aligned}$$

Тогда

$$R_u = H_u + B_u^{\mathrm{T}} A\sigma x + B_u^{\mathrm{T}}\sigma B,\ R_{uu} = H_{uu} + B_{uu}^{\mathrm{T}} A\sigma x + \sigma B_u + B_u^{\mathrm{T}}\sigma + B^{\mathrm{T}}\sigma B_{uu},$$

$$R^c_{u^c} = H^c_{u^c} + B^{c\mathrm{T}}_{u^c}\sigma^c x^c,\ R^c_{u^c u^c} = H^c_{u^c u^c} + B^{c\mathrm{T}}_{u^c u^c}\sigma^c x^c.$$

Заметим, что формулы для первых и вторых производных функций R, R^c линейно зависят от переменных состояния соответственно верхнего и нижнего уровня. Следовательно, полученное решение представляет собой приближенный синтез оптимального управления.

3. Итерационная процедура

На основе полученных соотношений можно сформулировать следующую итерационную процедуру на шаге s.

1. «Слева направо» просчитывается исходная ДНС при $u = u_s(k)$, $u^c = u_s^c(k,t)$ и заданных начальных условиях, получаются соответствующие траектории $x_s(k)$, $x_s^c(k,t)$.

2. «Справа налево» разрешается ДНС относительно $\psi(k)$, $\psi^c(k,t)$, $\sigma(k)$, $\sigma^c(k,t)$.

3. Находятся Δu, Δu^c и новые управления $u_{s+1}(k) = u_s(k) + \Delta u$, $u_{s+1}^c(k) = u_s^c(k) + \Delta u^c$.

4. Просчитывается «слева направо» исходная ДНС при новых управлениях с заданными начальными условиями.

Процесс итераций заканчивается, когда $|I_{s+1} - I_s| \approx 0$ с заданной точностью.

Теорема 1. *Пусть для заданной ДНС построена указанная итерационная процедура, и функционал I ограничен снизу. Тогда она генерирует улучшающую последовательность элементов $\{m_s\} \in \mathbf{D}$, сходящуюся по функционалу, т.е. существует число I^*, такое что $I^* \leqslant I(m_s)$, $I(m_s) \to I^*$.*

4. Пример

Проиллюстрируем один шаг метода на примере. Пусть задана ДНС:

$$\dot{x}^{c0} = \frac{1}{2}(x^c)^2,\ \dot{x}^c = x^c + \frac{1}{3}(u_1^c)^3, \quad x_1^c(0) = 1,$$

$$f^0(0,t,x^c,u_1^c) = (u_1^c)^2 - x^c,\ t \in [0;0,2];$$

$$\dot{x}^{c0} = \frac{1}{2}(x^c)^2 + u_2^c,\ \dot{x}^c = (t - u_2^c)^2,$$

$$f^1(1,t,x_1^c,u_2^c(t)) = (x^c)^2 + (u_2^c)^2, \quad t \in [0,2;0,4];$$

$$I = x^c(0,4) \to \min.$$

Нетрудно видеть, что $K = 0,1,2$. Поскольку роль связующей переменной на двух рассматриваемых этапах играет x^c, то в терминах этой переменной легко записать процесс верхнего уровня: $x(0) = x^c(0;0)$, $x(1) = x^c(0;0,2)$, $x(2) = x^c(1;0,4)$, $x(1) = x^c(0;0,2) = \theta$, $x^c(1;0,2) = x(1) = \xi$. Тогда $I = x(2)$.

В качестве начального приближения были выбраны значения $u_1^c(0,t) = u_2^c(1,t) = 1$, и $\alpha = 0,05$.

Таким образом, имеем:

$$k = 0:\ a^c = 1,\ b^c = 0,\ A^c = 1,\ B^c = \frac{1}{3}(u_1^c)^3,$$

$$a^0 = -1,\ b^0 = 0,\ a^{1c} = 0,\ b^{1c} = (u_1^c)^2,$$

$$k = 1: a^c = 0,\ b^c = (u_2^c)^2,\ A^c = 0,\ B^c = (t - u_2^c)^2,$$

$$
\begin{aligned}
&a^0 = 0,\ b^0 = 0,\ a^{1c} = 1,\ b^{1c} = (u_2^c)^2,\\
&H^c(0) = \psi^c(x^c + \frac{1}{3}(u_1^c)^3) - \frac{1}{2}(x^c)^2 - (u_1^c)^2 - \frac{1}{2}(1-\alpha)(\Delta u_1^c)^2,\\
&H^c(1) = \psi^c(t - u_2^c)^2 - \frac{1}{2}(x^c)^2 - u_2^c - (u_2^c)^2 - \frac{1}{2}(1-\alpha)(\Delta u_2^c)^2,\\
&R^c_{u_1^c}(0) = \psi^c(u_1^c)^2 - 2u_1^c - (1-\alpha)\Delta u_1^c + (u_1^c)^2\sigma^c x^c,\\
&R^c_{u_1^c u_1^c}(0) = 2\psi^c u_1^c - 2 - (1-\alpha) + 2u_1^c\sigma^c x^c,\\
&R^c_{u_2^c}(1) = -2\psi^c(t - u_2^c) - 1 - 2u_2^c - (1-\alpha)\Delta u_2^c - 2(t - u_2^c)\sigma^c x^c,\\
&R^c_{u_2^c u_2^c}(1) = 2\psi^c - 2 - (1-\alpha) + 2\sigma^c x^c.
\end{aligned}
$$

Уравнения:

$$
\begin{aligned}
&\psi(2) = -\alpha,\ \psi(1) = x^c(1;0,2)\psi^c(1;0,2),\ \psi^c(0;0,2) = \psi(2),\\
&\sigma^c(0;0,2) = \sigma(2),\\
&\psi^c(1;0,4) = 0,\ \sigma^c(1;0,4) = 0,\\
&\dot{\psi}^c(1,t) = -\sigma^c(t - u_2^c)^2,\ \dot{\sigma}^c(1,t) = -1,\\
&\dot{\psi}^c(0,t) = \psi^c - \sigma^c\frac{1}{3}(u_1^c)^3 + 1,\ \dot{\sigma}^c(1,t) = -\sigma^c - 1.
\end{aligned}
$$

При этом $I^1 = 1,82$. После выполнения одного шага $I^2 = 1,62$; $I^2 < I^1$, что подтверждает работоспособность предложенного алгоритма.

Список литературы

1. Расина И.В. Дискретно-непрерывные системы с промежуточными критериями // Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2017), г. Алушта. М.: Изд-во МАИ, 2017. С. 699-701.
2. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1985. 228 с.
3. Гурман В.И., Расина И.В. О практических приложениях достаточных условий сильного относительного минимума // Автоматика и телемеханика. 1979. № 10. С. 12-18.