

# СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О МАКСИМИЗАЦИИ ДИСТАНЦИИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В СРЕДЕ С ТРЕНИЕМ

И.А. Самыловский

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет космических исследований

Россия, 19991, Москва, Ленинские горы, МГУ, строение 52, 2-й учебный корпус, ФКИ

E-mail: [ivan.samylovskiy@cosmos.msu.ru](mailto:ivan.samylovskiy@cosmos.msu.ru)

**Ключевые слова:** задачи управления, задача Годдарда, принцип максимума, оптимальный синтез.

**Аннотация:** В настоящей работе мы рассматриваем задачу о максимизации высоты подъема объекта (ракеты) при наличии конечных ограничений и ограничений на управление. Динамика задачи упрощена относительно классической задачи Годдарда, однако усложнена наличием обобщенной функции сопротивления среды. Задача рассматривается на ограниченном отрезке времени. Мы исследуем условия оптимальности траекторий, строим синтез, выделяем возможные типы синтеза и эволюцию траекторий при изменении параметра задачи (гравитационного параметра).

## 1. Постановка задачи

Рассматривается следующая задача оптимального управления (вариант классической задачи Годдарда, см., например, [1–10]) на ограниченном интервале времени  $[0, T_0]$ .

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{s} = x, & s(0) = 0, & s(T) \rightarrow \max, \\ \dot{x} = u - \varphi(x) - g, & x(0) = 0, & x(T) \text{ is free}, \\ \dot{m} = -u, & m(0) = m_0, & m(T) \geq m_T, \\ 0 \leq u \leq 1, & T \leq T_0, \end{cases}$$

Подразумевается, что фазовые переменные  $s(t)$  and  $x(t)$  суть одномерные позиция и скорость объекта (см. [11, 12]),  $m(t)$  - полная масса объекта и "топлива  $u(t)$  - мгновенный расход топлива,  $g$  - постоянный гравитационный параметр, а  $\varphi(x)$  - "трение" (сопротивление среды,) зависящее от скорости. Предполагается, что (см. [13, 14])  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi'(x) \geq 0$  для всех  $x$ ,  $\varphi(x)$  дважды гладкая для  $x \neq 0$ ,  $\varphi''(x) < 0$  для всех  $x < 0$  and  $\varphi''(x) > 0$  для  $x > 0$ , откуда, в частности, следует, что  $\varphi(x)$  уменьшает модуль скорости  $|x|$ . В дальнейшем для удобства мы будем использовать обозначение

$$\gamma = m_0 - m_T.$$

## 2. Классификация экстремалей задачи

Анализ необходимых системы условий понтрягинского минимума (см. более полное изложение в работе [15]) показывает, что, если процесс  $(t, s(t), x(t), u(t))$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $T \leq T_0$  оптимален в задаче 1, то возможны лишь три варианта реализации терминальных значений:

1.  $T < T_0$  и  $x(T) = 0$ ,
2.  $T = T_0$  и  $x(T) = 0$  ("пороговый" случай)
3.  $T = T_0$  и  $x(T) > 0$ ,

Для выбора оптимальной траектории используются следующие величины:

1. Максимальное значение  $x_\gamma$ , получаемое как  $x_\gamma = \hat{x}(\gamma)$ , где  $\hat{x}(t)$  – решение ОДУ

$$(2) \quad \dot{\hat{x}} = 1 - \varphi(\hat{x}) - g, \quad \hat{x}(0) = 0.$$

2. Представление сопряженной переменной  $\psi(t)$ , соответствующей фазовой переменной  $x(t)$ , в виде

$$(3) \quad \psi(x) = \frac{x - x_T}{\varphi(x) + g} \text{ for } x \in [x_T, x_\gamma]$$

для исследуемой траектории.

Это позволяет сформулировать условие реализации особого участка как наличие решения уравнения

$$(4) \quad p_q(x_*) = 0, \text{ где } p_q(x) = \varphi(x) + g - (x - q)\varphi'(x) \text{ на } x \in [q, x_\gamma],$$

Отметим, что, поскольку  $p'_q(x) = -(x - q)\varphi''(x) < 0$ , то для заданного  $g$  имеем не более одного решения  $x_*$ . При этом при  $T < T_0, q = 0$  значение  $x_*$  определит  $\gamma_*$  – минимальный запас топлива, при котором будут реализовываться особые участки траектории, а также время  $T_*$  – минимальное конечное время на траектории с особым участком. Аналогично при  $T = T_0, q > 0$  мы получим  $\gamma^*$  – максимальный запас топлива, при котором будут реализовываться особые участки траектории,

При этом следует отдельно рассмотреть "вырожденный" случай  $T_* \geq T_0$ , при котором результирующий синтез будет состоять только из релейных траекторий (см. Рисунок 1)

## 3. Построение оптимального синтеза

Как итог построений, мы получаем следующие правила выбора типа оптимальной траектории в зависимости от значения  $\gamma := m_0 - m_T$ :

1.  $\gamma \in (0, \gamma_*]$  – оптимальной является релейная траектория, на которой  $x(T) = 0$ ,  $T < T_0$

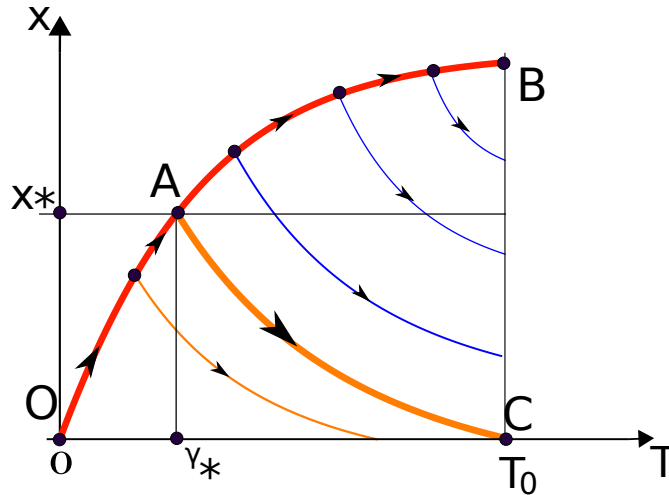


Рис. 1. "Вырожденный" синтез, построенный в плоскости  $xOT$  для  $T_* \geq T_0$

2.  $\gamma \in (\gamma_*, \gamma_0]$  – оптимальной является траектория с особым участком, на которой  $x(T) = 0, T \leq T_0$
3.  $\gamma \in (\gamma_0, \gamma^*]$  – оптимальной является траектория с особым участком, на которой  $x(T_0) > 0$ ,
4.  $\gamma \in (\gamma^*, T_0]$  – оптимальной является релейная траектория, на которой  $x(T_0) > 0$ .

Т.е. типичной картиной является появление и последующее исчезновение особого участка при увеличении доступного запаса топлива  $\gamma$

Типичный синтез представлен на Рисунке 2:

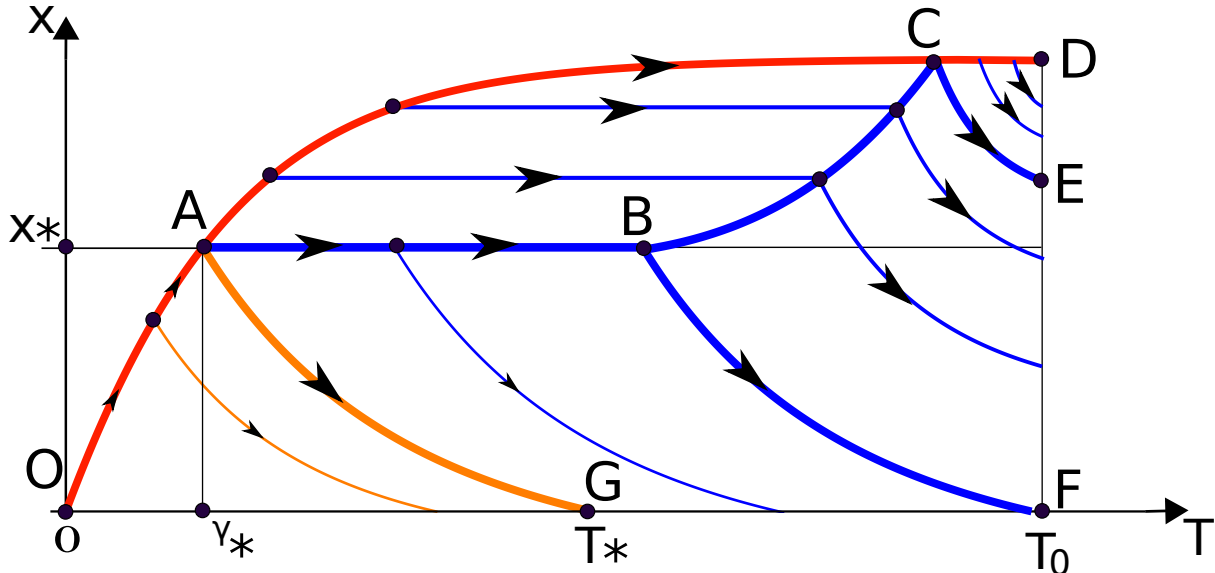


Рис. 2. Синтез, построенный в плоскости  $xOT$  для  $g > 0$ . Множество  $OAG$  заполнено релейными траекториями с  $x(T) = 0$ , множество  $ABFG$  – релейно-особыми траекториями с  $x(T) = 0$ , множество  $ACEFB$  – релейно-особыми траекториями с  $x(T_0) \geq 0$ , и, наконец, множество  $CDE$  заполнено релейными траекториями с  $x(T_0) > 0$ .

Отметим, что множество значений параметров, порождающий релейно-особые траектории, заключено "между" множествами, порождающими релейные траектории.

#### 4. Эволюция синтеза при изменении гравитационного параметра

В заключении отметим, что при уменьшении гравитационного параметра наблюдается "свертывание" области  $OABF$ . Так, при стремлении  $g$  к нулю мы получаем переход от "основного" ("наклонного") синтеза (см. Рисунок 2) к "горизонтальному" синтезу (см. Рисунок 3):

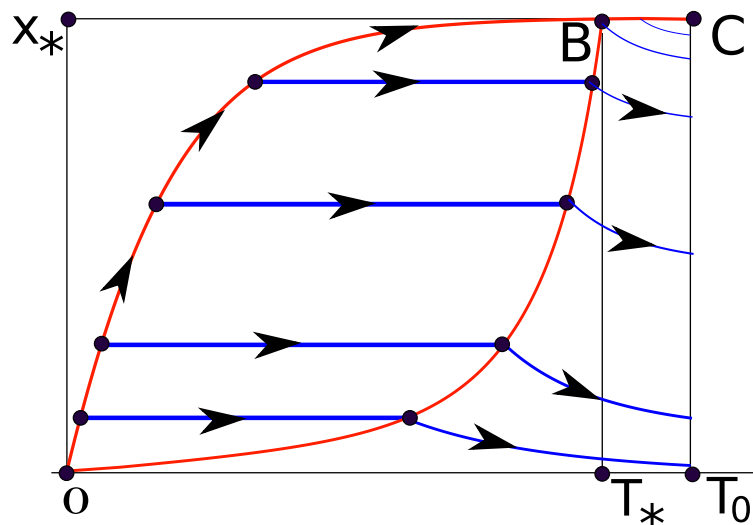


Рис. 3. Синтез, построенный в плоскости  $xOT$  для  $g = 0$

#### 5. Заключение

В настоящей работе рассмотрена задача о максимизации высоты подъема объекта (ракеты) при наличии конечных ограничений и ограничений на управление. Динамика задачи упрощена относительно классической задачи Годдарда, однако усложнена наличием обобщенной функции сопротивления среды. С помощью аналитического представления сопряженной переменной и рассмотрением специальной плоскости построено удобное для анализа представление синтеза оптимальных траекторий, построены типичные картины синтеза.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-31-00091).

#### Список литературы

1. Goddard R.H. A method on reaching extreme altitudes / Smithsonian Miscellaneous Collection. 1919. Vol. 71, No. 2. 82 p.

2. Leitmann G. A Calculus of Variations Solution of Goddard's problem // *Astronautica Acta*. 1956. Vol. II, No. 2. P. 55-62.
3. McNabb A. Comparison Theorems for Differential Equations // *J. of Math. Analysis and Applications*. 1986. Vol. 119. P. 417-428.
4. Tsiotras P., Kelley H.J. Drag-law effects in the Goddard problem // *Automatica*. 1991. Vol. 27, No. 3. P. 481-490.
5. Tsiotras P., Kelley H.J. Goddard problem with constrained time of flight // *J. Guid. Contr. Dynam.* 1992. Vol. 15, No. 2. P. 289-296.
6. Seywald H., Cliff E.M. Goddard problem in presence of a dynamic pressure limit // *J. Guid. Contr. Dynam.* 1993. Vol 16, No. 4. P. 776-781.
7. Bonnans F., Martinon P., Trelat E. Singular arcs in the generalized Goddard's problem // *J. Optim. Theory Appl.* 2008. Vol. 139, No. 2. P. 439-461.
8. Bonnans F., Laurent-Varin J., Martinon P., Trelat E. Numerical study of optimal trajectories with singular arcs for an Ariane 5 launcher // *J. Guid. Control Dyn.* Vol. 32, No. 1. P. 51-55.
9. Lobato F.S., Steffen Jr.V., Silva Neto A.J. Solution of singular optimal control problems using the improved differential evolution algorithm // *J. of Artificial Intelligence and Soft Computing Research*. 2011. Vol. 1, No. 3. P. 195-206.
10. Trelat E. Optimal control and applications to aerospace: some results and challenges // *J. Optimiz. Theor. Appl.* 2002. Vol. 154, No. 3. P. 713-758.
11. Dmitruk A., Samylovskiy I. A simplified Goddard problem in the presence of a nonlinear media resistance and a bounded thrust // *Proceedings of the European Control Conference*. Zurich, Switzerland, 2013. P. 341-346.
12. Dmitruk A., Samylovskiy I. A simple trolley-like model in the presence of a nonlinear friction and a bounded fuel expenditure // *Discussiones Mathematicae Differential Inclusions, Control and Optimization*. 2013. Vol. 33, No. 2. P. 135-147.
13. Dmitruk A., Samylovskiy I. On a trolley-like problem in the presence of a nonlinear friction and a bounded fuel expenditure // *Proceedings of the 9th Asian Control Conference (ASCC)*. Istanbul, Turkey, 2013. 6 p.
14. Dmitruk A., Samylovskiy I. Optimal trajectories in a maximal height problem for a simplified version of the Goddard model in case of generalized media resistance function // *Proceedings of the European Control Conference*. Linz, Austria, 2015. P. 1944-1949.
15. Dmitruk A., Samylovskiy I. Optimal Synthesis in the Goddard Problem on a Constrained Time Interval // *Proceedings of the European Control Conference*. Limassol, Cyprus, 2018. P. 2121-2126