УДК 517.929

УСЛОВИЕ ЛЯПУНОВА ДЛЯ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А.Н. Алисейко

Санкт-Петербургский государственный университет

Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7-9

E-mail: alexey.aliseyko@gmail.com

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с запаздыванием, функционалы Ляпунова-Красовского, условие Ляпунова.

Аннотация: Метод функционалов Ляпунова-Красовского является одним из основных способов анализа устойчивости систем с запаздыванием. Известно, что построение функционалов для линейных стационарных систем сводится к разысканию матрицы Ляпунова, являющейся решением матричного уравнения с запаздыванием, удовлетворяющим двум дополнительным свойствам. Было показано, что необходимым и достаточным условием единственности является условие Ляпунова — сумма любых двух собственных чисел системы лежит вне некоторой окружности с центром в нуле. В настоящей работе дается обобщение на случай нескольких кратных запаздываний известного для систем нейтрального типа с одним запаздываем результата о том, что проверка условия Ляпунова эквивалентна проверке двух более простых условий.

1. Введение

Метод функционалов Ляпунова—Красовского для линейных стационарных систем запаздывающего типа представляет собой уже достаточно хорошо проработанную теорию, воспроизводящую многие результаты известные для линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Случай систем нейтрально типа оказывается технически гораздо более трудным, хотя в последние годы и здесь были сделаны существенные продвижения. Детально изложенные главные результаты и исторический обзоры можно найти в книге [6].

Оказалось, что построение функционалов сводится к разысканию матрицы Ляпунова — решению матричного уравнения с запаздыванием, удовлетворяющему дополнительным симметрическому и алгебраическому условиям. Известно [6], что для систем запаздывающего типа существование единственной матрицы Ляпунова эквивалентно отсутствию у системы собственных чисел, симметричных относительно нуля. У систем нейтрального типа могут возникать цепочки собственных чисел со стремящимися к нулю суммами, так что условие потребовалось модифицировать. Впервые условие Ляпунова для систем нейтрального типа было предложено в [5].

В статье [5] также было показано, что проверка этого нового условия может быть сведена к проверке двух более простых условий, однако это было показано лишь для систем с одним запаздыванием, а использованный метод доказательства существенно полагался на квазиполиномиальность характеристической функции системы, что представляет трудность для обобщений. В данной работе производится обобщение этого результата на случай систем нейтрального типа с несколькими кратными запаздываниями под дифференциалом и правой частью общего вида.

2. Основные определения

Будем рассматривать системы вида

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{m} A_k x(t-kh) = \int_{-mh}^{0} dQ(\theta)x(t+\theta), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, матрицы $A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, причем $A_0 = E_n$, $h > 0$, матричная функция $Q(\theta) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ имеет на отрезке $[-mh, 0]$ ограниченную вариацию.

Определение ([6]). *Матрицей Ляпунова системы* (1)*, ассоциированной с симметричной матрицей W, будем называть непрерывную функцию $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющую трем свойствам:*

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{m} U(t-kh)A_k = \int_{-mh}^{0} U(t+\theta)dQ(\theta), \quad t > 0,$$
$$U^T(t) = U(-t),$$
$$-W = \sum_{k=0}^{m} A_k^T \int_{-mh}^{0} U(\theta+kh)dQ(\theta) + \sum_{k=0}^{m}\int_{-mh}^{0} dQ^T(\theta)U(-\theta-kh)A_k.$$

Определение ([4]). *Функцию*

$$f(s) = \det\left[s\sum_{k=0}^{m} A_k e^{-skh} - \int_{-mh}^{0} e^{s\theta}dQ(\theta)\right]$$

будем называть характеристической функцией системы (1)*, спектром системы* (1) *— множество $\Lambda = \{s \in \mathbb{C} : f(s) = 0\}$, а комплексные числа $s \in \Lambda$ — собственными числами системы* (1).

Определение ([6]). *Будем говорить, что система* (1) *удовлетворяет условию Ляпунова, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $s_1, s_2 \in \Lambda$ выполняется $|s_1 + s_2| > \varepsilon$.*

Хорошо известно [6], что данное условие является необходимым и достаточным условием существования и единственности матрицы Ляпунова, ассоциированной с W. Для дальнейшего рассмотрения будет удобно ввести функции

$$n(s) = \det\left[\sum_{k=0}^{m} A_k s^k\right], \quad R(s) = \int_{-mh}^{0} e^{s\theta}dQ(\theta).$$

3. Основной результат

Покажем, что проверка условия Ляпунова может быть разбита на проверку двух более простых условий, а именно докажем следующее утверждение:

Теорема 1. *Система* (1) *удовлетворяет условию Ляпунова тогда и только тогда, когда*

1. *сумма любых двух собственных чисел системы* (1) *отлична от нуля,*

2. *произведение любых двух нулей полинома* $n(s)$ *отлично от нуля.*

Прежде чем переходить к доказательству теорему 1 установим некоторые простейшие свойства.

Лемма 1. *Функция* $R(s)$ *ограничена в любой полуплоскости вида* $\mathrm{Re}(s) > \beta$.

Доказательство. Действительно,

$$\|R(s)\| \leqslant TV(Q)\max\{1, e^{-\beta mh}\},$$

где $TV(Q)$ — полная вариация $Q(\theta)$ на $[-h, 0]$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Все собственные числа системы* (1) *лежат в некоторой полуплоскости* $\mathrm{Re}(s) \leqslant \beta$.

Доказательство. Выберем β_0 так, чтобы $\sum_{k=1}^{m}\|A_k\|e^{-\beta_0 kh} < 1$. Тогда либо все собственные числа системы (1) лежат в полуплоскости $\mathrm{Re}(s) \leqslant \beta_0$, либо найдется число s_0 с $\mathrm{Re}(s_0) > \beta_0$ и вектор $\gamma \neq \mathbf{0}$, что

$$s_0\gamma = -\left[s_0\sum_{k=1}^{m} A_k e^{-s_0 kh} + \int_{-mh}^{0} e^{s_0\theta}dQ(\theta)\right]\gamma.$$

По лемме 1 в полуплоскости $\mathrm{Re}(s_0) > \beta_0$ имеем $\|R(s)\| \leqslant r$. Значит,

$$\mathrm{Re}(s_0) \leqslant |s_0| < \frac{r}{1 - \sum_{k=1}^{m}\|A_k\|e^{-\beta_0 kh}} = \beta,$$

и все собственные числа лежат в полуплоскости $\mathrm{Re}(s) \leqslant \beta$. Лемма 2 доказана.

Обратимся теперь к доказательству основного результата.

Доказательство теоремы 1. Покажем необходимость. Ясно, что если не выполнено условие 1, то не выполнено и условие Ляпунова. Предположим, что не выполнено условие 2, то есть найдутся числа $s', s'' \in \mathbb{C}$ такие, что $n(s') = n(s'') = 0$ и $s's'' = 1$. Тогда $s' \neq 0$, значит можно построить две последовательности

$$s'_l = \frac{1}{h}\left[-\ln|s'| + i(-\arg s' + 2\pi l)\right], \quad s''_l = -s'_l,$$

где $\arg s'$ — главное значение аргумента. Рассмотрим $2\pi i/h$-периодическую функцию $n_p(s) = n(e^{-sh})$, построенные последовательности являются ее нулями. В силу аналитичности нули изолированы, следовательно для некоторого $\bar{\varepsilon}$ внутри и на окружности с центром s'_0 и радиуса $\bar{\varepsilon}$ нет других нулей $n_p(s)$.

Пусть $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$. Построим окружность γ_0 с центром s'_0 и радиуса ε. В силу периодичности s'_l является единственным нулем функции $n_p(s)$ внутри и на окружности $\gamma_l = \gamma_0 + 2\pi li/h$. Все такие окружности лежат в некоторой полуплоскости $\mathrm{Re}(s) > \beta$. По лемме 1 имеем $\|R(s)\| \leqslant r$. Используя результаты работы [3] для $s \in \gamma_l$ оценим

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(s)}{s^n} - n_p(s)\right| &= \left|\det\left[\sum_{k=0}^{m} A_k e^{-skh} - \frac{1}{s}R(s)\right] - \det\left[\sum_{k=0}^{m} A_k e^{-skh}\right]\right| \leqslant \\ &\leqslant n\left\|\frac{1}{s}R(s)\right\|\max\left\{\left\|\sum_{k=0}^{m} A_k e^{-skh}\right\|, \left\|\sum_{k=0}^{m} A_k e^{-skh} - \frac{1}{s}R(s)\right\|\right\}^{n-1}.\end{aligned} \tag{2}$$

Ясно, что норма

$$\left\|\sum_{k=0}^{m} A_k e^{-skh}\right\| \leqslant \sum_{k=0}^{m}\|A_k\| e^{-\beta kh},$$

равномерно ограничена по l, $\|R(s)/s\| \leqslant r/(|s_l'|-\varepsilon) \to 0$ при $l \to \infty$. Из этого следует, что и последняя норма в (2) также равномерно ограничена по l.

Заметим, что $\max_{s\in\gamma_l}|n_p(s)| = \max_{s\in\gamma_0}|n_p(s)| = \mu > 0$. Из (2) получим N_1 такое, что для всех $l > N_1$ и $s \in \gamma_l$ выполняется

$$\left|\frac{f(s)}{s^n} - n_p(s)\right| < \mu \leqslant |n_p(s)|. \tag{3}$$

Из (3) по теореме Руше следует, что в любой окружности γ_l, $l > N_1$, найдется нуль функции $f(s)/s^n$, а значит и функции $f(s)$; обозначим его $s_l^{(1)}$. Аналогично можно показать, что для всех $l > N_2 \geqslant N_1$ найдется нуль $s_l^{(2)}$ функции $f(s)$ такой, что $|s_l^{(2)} - s_l''| < \varepsilon$. Но тогда

$$|s_l^{(1)} + s_l^{(2)}| \leqslant |s_l^{(1)} - s_l'| + |s_l^{(2)} - s_l''| + |s_l' + s_l''| < 2\varepsilon.$$

Так как ε было произвольным, то условие Ляпунова не выполнено.

Обратимся теперь к доказательству достаточности. Пусть условие Ляпунова не выполнено. Если сумма каких-то двух корней равна нулю, то не выполнено условие 1. В противном случае можно построить две последовательности корней $\{s_l'\}_{l=1}^{\infty}$, $\{s_l''\}_{l=1}^{\infty}$ функции $f(s)$ таких, что

$$\lim_{l\to\infty}|s_l' + s_l''| = 0. \tag{4}$$

Из (4) и леммы 2 найдем $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, что $\alpha \leqslant \mathrm{Re}(s_l') \leqslant \beta$. Следовательно, некоторая подпоследовательность последовательности $\{\mathrm{Re}(s_l')\}_{l=1}^{\infty}$ сходится, для простоты будем считать, что $\mathrm{Re}(s_l') \to \gamma$ при $l \to \infty$. Отметим, что так как аналитическая функция имеет конечное число корней на любом компакте, то отсюда следует $\mathrm{Im}(s_l') \to \infty$.

Далее, $|e^{-s_l'h}| \to e^{-\gamma h}$ при $l \to \infty$, значит последовательность $\{e^{-s_l'h}\}_{l=1}^{\infty}$ ограничена. Аналогично вышесказанному мы можем и будем считать, что данная последовательность сходится:

$$\lim_{l\to\infty} e^{-s_l'h} = s'. \tag{5}$$

Отметим, что $|s'| = e^{-\gamma h} \neq 0$. Из (4) и (5) получим, что

$$\lim_{l\to\infty} e^{-s_l''h} = \lim_{l\to\infty} e^{s_l'h} \lim_{l\to\infty} e^{-(s_l'+s_l'')h} = \frac{1}{s'} = s''.$$

Вспоминая, что s_l' есть корни $f(s)$, рассмотрим равенство

$$\det\left[s_l'\sum_{k=0}^{m} A_k e^{-s_l'kh} - \int_{-mh}^{0} e^{s_l'\theta}dQ(\theta)\right] = 0.$$

Так как $|s_l'| \to \infty$, то можно считать, что $s_l' \neq 0$, тогда

$$\det\left[\sum_{k=0}^{m} A_k e^{-s_l'kh} - \frac{R(s_l')}{s_l'}\right] = 0.$$

Переходя к пределу при $l \to \infty$ и учитывая ограниченность $R(s)$ в полуплоскости $\mathrm{Re}(s) \geqslant \alpha$, получим $n(s') = 0$. Аналогично можно показать, что и $n(s'') = 0$, противоречие с условием 2.

Теорема 1 доказана.

Следствие. *Пусть выполнено условие Ляпунова, тогда любая матрица Ляпунова системы* (1) *дифференцируема на* $(0, h)$.

Доказательство. Так условие Ляпунова выполнено, то по теореме 1 произведение любых двух нулей полинома $n(s)$ отлично от нуля. Нетрудно видеть, что это выполнено тогда и только тогда, когда полиномы $n(s) = \det[\sum_{k=0}^{m} A_k s^k]$ и $n^*(s) = \det[\sum_{k=0}^{m} A_k s^{m-k}]$ не имеют общих корней. В свою очередь, это эквивалентно [2] невырожденности матрицы

$$\begin{pmatrix} A_0^T \otimes E_n & \dots & A_m^T \otimes E_n & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & A_0^T \otimes E_n & \dots & A_m^T \otimes E_n \\ E_n \otimes A_m^T & \dots & E_n \otimes A_0^T & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & E_n \otimes A_m^T & \dots & E_n \otimes A_0^T \end{pmatrix},$$

где $A \otimes B$ есть кронекерово произведение матриц A и B. Из обратимости данной матрицы нетрудно получить дифференцируемость матрицы Ляпунова, например аналогично тому, как это было сделано в статье [1]. Следствие доказано.

4. Заключение

В данной работы было показано, что проверка условия Ляпунова для систем нейтрального типа с несколькими кратными запаздываниями может быть сведена к проверке двух более простых условий. Помимо непосредственного практического применения, это обстоятельство оказывается достаточно важным при построении методов нахождения матриц Ляпунова. Другим направлением исследований может являться дальнейшее изучение условие Ляпунова в случае некратных запаздываний.

Список литературы

1. Егоров А.В. Критерий существования и единственности матрицы Ляпунова для одного класса систем с запаздыванием // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2016. № 2. С. 12-25.
2. Хайниг Г. О понятиях безутианты и результанта для операторных пучков // Функциональный анализ и его приложения. 1977. Т. 11, № 3. С. 94-95.
3. Friedland S. Variation of tensor powers and spectra // Linear and Multilinear Algebra. 1982. Vol. 12, No. 2. P. 81-98.
4. Bellman R., Cooke K.L. Differential-Difference Equations. New York: Academic Press, 1963. 482 p.
5. Kharitonov V.L. Lyapunov matrices: Existence and uniqueness issues // Automatica. 2010. Vol. 46, No. 10. P. 1725-1729.
6. Kharitonov V.L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 311 p.