УДК 517.929

# ВЫДЕЛЕНИЕ НУЛЕВОЙ ДИНАМИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

**Е.И. Атамась**
*МГУ им. М.В. Ломоносова*
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1
E-mail: eatamas@cs.msu.ru

**Ключевые слова:** системы с запаздыванием, несоизмеримые запаздывания, канонические формы, нулевая динамика, обращение систем.

**Аннотация:** Для квадртаной линейной стационарной управляемой системы, описываемой функционально-дифференциальными уравнениями с несоизмеримыми запаздываниями строится каноническая форма с выделением нулевой динамики, описывается алгоритм приведения к ней и условия, при которых такое приведение возможно.

Каноническая форма с выделением нулевой динамики играет важную роль в решении многих задач математической теории автоматического управления. Она возникает, в частности, при решении задач обращения и наблюдения для различных классов управляемых систем. Целью данной работы является получение такой формы для систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями с несоизмеримыми запаздываниями. Оказывается, что обобщение результатов, полученных ранее для систем с соизмеримыми запаздываниями [3], требует привлечения значительно более сложного математического аппарата.

Рассматривается линейная стационарная управляемая система вида

$$\left\{\begin{aligned} &\dot x(t) = \sum_{i=0}^{k} A_i x(t-\tau_i) + \sum_{i=0}^{k} B_i \xi(t-\tau_i),\\ &y(t) = \sum_{i=0}^{k} C_i x(t-\tau_i), \end{aligned}\right. \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор системы, $y \in \mathbb{R}^l$ — выход системы, $\xi \in \mathbb{R}^m$ — входной сигнал.

Нас будет интересовать случай, когда запаздывания $\tau_i$ могут быть несоизмеримы между собой. Напомним, что вещественные числа $\tau_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, называются соизмеримыми, если существует такое число $\tau$, что $\tau_i = n_i\tau$, $n_i \in \mathbb{N}$. Случай несоизмеримых запаздываний является значительно более сложным, нежели случай, когда запаздывания предполагаются соизмеримыми.

Для простоты мы ограничимся рассмотрением квадратных систем, для которых $m = l$.

В основе предлагаемого подхода лежит представление системы с запаздыванием в алгебраической форме [1]. Разобьем все запаздывания на классы соизмеримых между собой, порождаемых запаздываниями $\bar{\tau}_j$, $1 \leqslant j \leqslant p$ соответственно. Для каждого из этих запаздываний введем оператор сдвига $\delta_j : f(t) \mapsto f(t-\tau_j)$. Тогда система может быть переписана в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \sum\limits_{j=0}^{p} \sum\limits_{i=0}^{p_j} A_{ij}\delta_j^i x(t) + \sum\limits_{j=0}^{p} \sum\limits_{i=0}^{p_j} B_{ij}\delta_j^i \xi(t), \\ y(t) = \sum\limits_{j=0}^{p} \sum\limits_{i=0}^{p_j} C_{ij}\delta_j^i x(t), \end{array} \right. \tag{2}$$

где $p_j$ — максимальное из чисел $n_i$, соответствующих $j$-ому классу.

Далее, формально заменяя оператор $\delta_j$ алгебраической переменной $\Delta_j$, получаем систему

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + B\xi, \\ y = Cx, \end{array} \right. \tag{3}$$

где $A = A(\Delta_1, \ldots, \Delta_p)$, $B = B(\Delta_1, \ldots, \Delta_p)$, $C = C(\Delta_1, \ldots, \Delta_p)$ — матрицы с элементами из кольца многочленов $\mathbb{R}[\Delta_1, \ldots, \Delta_p]$.

**Пример 1.** *В качестве примера рассмотрим систему*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = x(t) + x(t-1) + 2x(t-\sqrt{3}) + u(t) + 2u(t-1) - 3u(t-2\sqrt{3}), \\ y(t) = 2x(t) - x(t-2) + 3x(t-\sqrt{3}). \end{array} \right.$$

*Сопоставим классу запаздывания $\tau_1 = 1$ переменную $\Delta_1$, классу запаздывания $\tau_2 = \sqrt{3}$ переменную $\Delta_2$. В результате система будет записана в виде*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = (1 + \Delta_1 + 2\Delta_2)x + (1 + 2\Delta_1 - 3\Delta_2^2)u, \\ y(t) = (2 - \Delta_1^2 + 3\Delta_2)x. \end{array} \right.$$

Далее напомним важное определение.

**Определение 1.** *Вектор $r = (r_1, \ldots, r_m)$ определяет относительный векторный порядок, если выполнены следующие условия:*
*1) $c_iB = 0$, $c_iAB = 0$, $\ldots$ , $c_iA^{r_i-2}B = 0$, $c_iA^{r_i-1}B \neq 0$, $1 \leqslant i \leqslant m$.*
*2)* $\det \begin{pmatrix} c_1A^{r_1-1}B \\ \vdots \\ c_mA^{r_m-1}B \end{pmatrix} = \det H_r(\Delta) \neq 0.$

В случае, когда $\det H_r(\Delta) \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (такие матрицы называются *унимодулярными*), т. е. матрица $H_r(\Delta)$ обратима, относительный порядок называется *чистым*.

В дальнейшем мы будем предполагать, что система обладает чистым относительным порядком.

**Лемма 1.** *Пусть система обладает векторным относительным порядком $r = (r_1, \ldots, r_m)$. Тогда строки $c_1$, $c_1A$, ..., $c_1A^{r_1-1}$, $c_2$, $c_2A$, ..., $c_2A^{r_2-1}$, $c_m$, $c_mA$, ..., $c_mA^{r_m-1}$ линейно независимы.*

Составим из этих строк матрицу $T_1$.

$$T_1(\Delta) = \left[ \begin{array}{c} c_1 \\ c_1 A \\ \vdots \\ c_1 A^{r_1-2} \\ \hline \vdots \\ \hline c_m \\ c_m A \\ \vdots \\ c_m A^{r_m-2} \\ \hline c_1 A^{r_1-1} \\ \vdots \\ c_m A^{r_m-1} \end{array} \right].$$

Замены координат в системах над кольцами осуществляются унимодулярными матрицами. Напомним, что матрица называется унимодулярной, если ее определитель обратим над рассматриваемым кольцом. В интересующем нас случае кольца многочленов от нескольких переменных данное условие превращается в следующее: матрица унимодулярна, если ее определитель есть ненулевое вещественное число.

Нашей основной задачей является построение канонической формы с выделением нулевой динамики. Для это необходимо получить унимодулярную матрицу замены координат вида

$$T = \left[ \begin{array}{c} T' \\ T_1 \end{array} \right].$$

Другими словами, необходимо дополнить матрицу $T_1$ до квадратной унимодулярной. Возникает следующий вопрос: при каких матрицах $T_1$ такое дополнение возможно?

**Теорема 1.** *Матрицу над полиномиальным кольцом можно дополнить до унимодулярной тогда и только тогда, когда идеал, порожденный ее минорами максимального порядка, совпадает с самим кольцом.*

Необходимость условия теоремы доказывается элементарно, тогда как доказательство достаточности базируется на продвинутом алгебраическом результате — теореме Квиллена-Суслина [2].

Имеет место следующая основная теорема.

**Теорема 2.** *Пусть система (1) обладает чистым векторным относительным* *порядком. Тогда она обратимым преобразованием приводима к виду*

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dot{\bar{x}} = A_{11}\bar{x} + A_{12}y, \\
\left\{
\begin{array}{l}
\dot{y}_1^1 = y_2^1, \\
\vdots \\
\dot{y}_{r_1-1}^1 = y_{r_1}^1,
\end{array}
\right. \\
\vdots \\
\left\{
\begin{array}{l}
\dot{y}_1^m = y_2^m, \\
\vdots \\
\dot{y}_{r_m-1}^m = y_{r_m}^m,
\end{array}
\right. \\
\begin{pmatrix} \dot{y}_{r_1}^1 \\ \vdots \\ \dot{y}_{r_m}^m \end{pmatrix} = A_{21}\bar{x} + A_{22}\bar{y} + H_r\xi,
\end{array}
\right.
\tag{4}
$$

*где* $\bar{y} = (y_1^1, \dots, y_{r_1-1}^1, y_1^2, \dots, y_{r_2-1}^2, \dots, y_1^m, \dots, y_{r_m-1}^m, y_{r_1}^1, \dots, y_{r_m}^m)$, $y_i = y_1^i$ *— выходы системы;* $y_j^i = y_i^{(j-1)}$ *— производные выходов;* $\bar{x}' \in R^{n-|r|}$ *— оставшиеся координаты.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-37-00106 мол_а).

## Список литературы

1. Morse A.S. Ring Models for Delay-Differential Systems // IFAC Proceedings Volumes. 1974. Vol. 7, No. 1. P. 439-445.
2. Lam T. Y. Serre's problem on projective modules. New York: Springer Science+Business Media, 2006.. 300 p.
3. Ильин А.В., Атамась Е.И., Фомичев В.В. О приведении систем с запаздыванием к форме с выделением нулевой динамики // Доклады Академии наук. 2018. Т. 480, № 1. С. 11-15.