УДК 517.929, 517.977

О НАЗНАЧЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО СПЕКТРА ДЛЯ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.А. Зайцев

Удмуртский государственный университет

Россия, 426034, Ижевск, Университетская ул., 1

E-mail: verba@udm.ru

И.Г. Ким

Удмуртский государственный университет

Россия, 426034, Ижевск, Университетская ул., 1

E-mail: kimingeral@gmail.com

Ключевые слова: линейные системы с запаздыванием, назначение спектра, стабилизация, билинейные системы.

Аннотация: Рассматривается билинейная управляемая система, заданная линейной стационарной системой дифференциальных уравнений с запаздыванием в состоянии. Исследуется задача назначения произвольного конечного спектра посредством стационарного управления. Требуется построить постоянный вектор управления таким образом, чтобы характеристический квазиполином замкнутой системы обращался в полином с произвольными наперед заданными коэффициентами. Получены условия на коэффициенты системы, при которых найден критерий разрешимости данной задачи назначения конечного спектра. Критерий выражен в терминах ранговых условий для матриц специального вида. Показана взаимосвязь этих ранговых условий со свойством согласованности усеченной системы без запаздывания. Результаты обобщают полученные ранее результаты о назначении спектра для линейных систем со статической обратной связью по выходу с запаздыванием и для билинейных систем без запаздывания.

Задачи стабилизации билинейных систем с запаздыванием изучались в работах [1–5]. В работах [2, 4, 5] на основе метода Ляпунова–Красовского сформулированы условия стабилизации исследуемых систем посредством обратной связи по состоянию, они выражены в терминах линейных матричных неравенств и разрешимости уравнения Риккати. В [1, 3] для получения достаточных условий глобальной стабилизации посредством статической обратной связи по состоянию и динамической обратной связи по выходу применяется принцип инвариантности Ла-Салля. Здесь получены условия разрешимости задачи назначения произвольного конечного спектра посредством стационарного управления и, как следствие, условия стабилизации для билинейной стационарной системы с запаздыванием.

Введем обозначения. Пусть $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{R}$; $\mathbb{K}^n$ — линейное n-мерное пространство векторов-столбцов $x = \operatorname{col}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x_i \in \mathbb{K}$ над полем $\mathbb{K}$; $M_{m,n}(\mathbb{K})$ — пространство $m \times n$-матриц с элементами из поля $\mathbb{K}$; $M_n(\mathbb{K}) := M_{n,n}(\mathbb{K})$; $\operatorname{Sp} H$ — след матрицы $H \in M_n(\mathbb{K})$.

Рассмотрим билинейную стационарную систему с запаздыванием по состоянию

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0x(t-h) + \Big(\sum_{j=1}^{r} u_jA_j\Big)x(t) + \Big(\sum_{\ell=1}^{s} v_\ell B_\ell\Big)x(t-h), \quad t > 0, \tag{1}$$

с начальными условиями $x(\tau) = \mu(\tau)$, $\tau \in [-h, 0]$; здесь A_j, $B_\ell \in M_n(\mathbb{K})$, $j = \overline{0, r}$, $\ell = \overline{0, s}$; $h > 0$ — постоянное запаздывание, $\mu : [-h, 0] \to \mathbb{K}^n$ — непрерывная функция; $x \in \mathbb{K}^n$ — вектор фазовых координат, $u = \mathrm{col}\,(u_1, \ldots, u_r) \in \mathbb{K}^r$, $v = \mathrm{col}\,(v_1, \ldots, v_s) \in \mathbb{K}^s$ — векторы управляющего воздействия.

Обозначим через

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = \det\Big[\lambda I - \Big(A_0 + \sum_{j=1}^{r} u_jA_j\Big) - e^{-\lambda h}\Big(B_0 + \sum_{\ell=1}^{s} v_\ell B_\ell\Big)\Big]$$

характеристический квазиполином системы (1). Характеристическое уравнение $\varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = 0$ системы (1) имеет вид

$$\lambda^n + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=0}^{i} \delta_{ik}\lambda^{n-i}e^{-\lambda hk} = 0. \tag{2}$$

Здесь числа δ_{ik} зависят от A_j, B_ℓ, u_j, v_ℓ. Множество $\sigma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = 0\}$ корней уравнения (2) называется спектром системы (1). Если $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, то спектр σ симметричен относительно вещественной оси. В общем случае спектр σ состоит из счетного числа точек $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Если в уравнении (2) $\delta_{ik} = 0$ для всех $i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, i}$, то характеристический квазиполином обращается в полином, и спектр σ системы (1) является конечным множеством. Рассмотрим задачу назначения произвольного конечного спектра σ системы (1) посредством стационарного управления.

Определение 1. *Будем говорить, что задача назначения произвольного конечного спектра системы* (1) *посредством стационарного управления разрешима, если для любого набора $\gamma_i \in \mathbb{K}$, $i = \overline{1, n}$, найдутся векторы $u \in \mathbb{K}^r$, $v \in \mathbb{K}^s$ такие, что*

$$\varphi(\lambda, e^{-\lambda h}) = \lambda^n + \gamma_1\lambda^{n-1} + \ldots + \gamma_n. \tag{3}$$

Пусть коэффициенты системы (1) имеют специальный вид: матрица A_0 имеет нижнюю форму Хессенберга с ненулевыми элементами первой наддиагонали; для некоторого $p \in \{1, \ldots, n\}$ первые $p - 1$ строк и последние $n - p$ столбцов матриц A_j, $j = \overline{1, r}$, равны нулю, то есть

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & \ldots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad a_{i,i+1} \neq 0, \quad i = \overline{1, n-1}; \tag{4}$$

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{A}_j & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{A}_j \in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}), \quad j = \overline{1, r}. \tag{5}$$

Для такой системы без запаздывания (то есть в случае, когда $B_\ell = 0$, $\ell = \overline{0, s}$) в работе [6] (см. также [7]) доказано, что задача управления спектром разрешима тогда и только тогда, когда ранг матрицы $\varGamma = \{\mathrm{Sp}\,(A_j A_0^{i-1})_{i,j=1}^{n,r}\}$ равен n. В настоящей работе этот результат обобщается на системы с запаздыванием. Будем предполагать, что матрицы B_ℓ, $\ell = \overline{0,s}$, системы (1) также имеют специальный вид: первые $p-1$ строк и последние $n-p$ столбцов матриц B_ℓ, $\ell = \overline{0,s}$, равны нулю, то есть

$$B_\ell = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \widehat{B}_\ell & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{B}_\ell \in M_{n-p+1,p}(\mathbb{K}), \quad \ell = \overline{0,s}, \qquad p \in \{1,\dots,n\}. \tag{6}$$

Здесь число p в (6) то же, что и в (5).

По системе (1) построим матрицы $\varGamma_0 \in M_{n,r}(\mathbb{K})$, $\varGamma_1 \in M_{n,s}(\mathbb{K})$, $\varLambda_1 \in M_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$\varGamma_0 = \begin{pmatrix} \mathrm{Sp}\,(A_1) & \mathrm{Sp}\,(A_2) & \dots & \mathrm{Sp}\,(A_r) \\ \mathrm{Sp}\,(A_1A_0) & \mathrm{Sp}\,(A_2A_0) & \dots & \mathrm{Sp}\,(A_rA_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{Sp}\,(A_1A_0^{n-1}) & \mathrm{Sp}\,(A_2A_0^{n-1}) & \dots & \mathrm{Sp}\,(A_rA_0^{n-1}) \end{pmatrix},$$

$$\varGamma_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{Sp}\,(B_1) & \mathrm{Sp}\,(B_2) & \dots & \mathrm{Sp}\,(B_s) \\ \mathrm{Sp}\,(B_1A_0) & \mathrm{Sp}\,(B_2A_0) & \dots & \mathrm{Sp}\,(B_sA_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{Sp}\,(B_1A_0^{n-1}) & \mathrm{Sp}\,(B_2A_0^{n-1}) & \dots & \mathrm{Sp}\,(B_sA_0^{n-1}) \end{pmatrix},$$

$$\varLambda_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{Sp}\,(B_0) \\ \mathrm{Sp}\,(B_0A_0) \\ \dots \\ \mathrm{Sp}\,(B_0A_0^{n-1}) \end{pmatrix}$$

и матрицу $\varDelta_1 = [\varGamma_1, \varLambda_1] \in M_{n,s+1}(\mathbb{K})$.

Теорема 1. *Пусть матрицы системы (1) имеют специальный вид (4), (5), (6). Тогда задача назначения произвольного конечного спектра системы (1) посредством стационарного управления разрешима в том и только в том случае, если выполнены следующие условия:*

$$\mathrm{rank}\,\varGamma_0 = n, \tag{7}$$

$$\mathrm{rank}\,\varGamma_1 = \mathrm{rank}\,\varDelta_1. \tag{8}$$

Замечание 1. *Теорема 1 обобщает результаты [8, § 1] о назначении произвольного конечного спектра для линейной стационарной управляемой системы с запаздыванием, замкнутой линейной статической обратной связью по выходу с запаздыванием.*

Замечание 2. *Предположим, что система (1) не имеет запаздывания, т.е. $B_\ell = 0$, $\ell = \overline{0,r}$. Тогда условие (8) выполнено. В таком случае теорема 1 совпадает с теоремой 2 [6]. Таким образом, теорема 1 обобщает результаты [6] для билинейных систем без запаздывания на билинейные системы (1) с запаздыванием.*

Рассмотрим задачу стабилизации системы (1) посредством стационарного управления: требуется построить $u \in \mathbb{K}^r$, $v \in \mathbb{K}^s$ такие, что система (1) асимптотически устойчива. Система (1) асимптотически устойчива, если спектр σ системы (1) лежит в левой полуплоскости $\omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$. Если задача назначения произвольного конечного спектра системы (1) посредством стационарного управления разрешима, тогда, выбирая многочлен (3) таким образом, что его корни лежат в ω, можно добиться асимптотической устойчивости системы (1). Таким образом, из теоремы 1 вытекает очевидное следствие.

Следствие 1. *Пусть матрицы системы* (1) *имеют специальный вид* (4), (5), (6). *Предположим, что выполнены условия* (7), (8). *Тогда система* (1) *стабилизируема посредством стационарного управления.*

Построим по системе (1) усеченную систему (без запаздывания), предполагая, что $B_\ell = 0$, $\ell = \overline{0, s}$:

$$\dot{x}(t) = \Big(A_0 + \sum_{j=1}^{r} u_j A_j\Big) x(t). \tag{9}$$

Через $X(t, s)$ обозначим матрицу Коши свободной системы $\dot{x}(t) = A_0 x(t)$. Следовательно, $X(t, s) = e^{(t-s)A_0}$.

Определение 2. *Система* (9) *называется согласованной на отрезке* $[t_0, t_1]$, *если для любой матрицы* $H \in M_n(\mathbb{K})$ *существует кусочно-непрерывное управление* $\widehat{u} : [t_0, t_1] \to \mathbb{K}^r$ *такое, что решение* $n \times n$*-матричной задачи Коши*

$$\dot{Z}(t) = A_0 Z(t) + \sum_{j=1}^{r} \big(\widehat{u}_j(t) A_j\big) X(t, t_0), \qquad Z(t_0) = 0,$$

удовлетворяет условию $Z(t_1) = H$.

Свойство согласованности (не обязательно стационарной) системы (9) было введено в [9]. Стационарные согласованные системы (9) были исследованы в [10, 11]. В [10, Утверждение 5] доказано, что для системы (9) с циклической матрицей A_0 (в частности, с матрицей A_0 вида (4)) свойство согласованности является достаточным для выполнения условия (7). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть матрицы системы* (1) *имеют специальный вид* (4), (5), (6). *Пусть усеченная система* (9) *согласованна, и выполнено условие* (8). *Тогда задача назначения произвольного конечного спектра системы* (1) *посредством стационарного управления разрешима.*

Следствие 2. *Пусть матрицы системы* (1) *имеют специальный вид* (4), (5), (6). *Пусть система* (9) *согласованна, и выполнено условие* (8). *Тогда система* (1) *стабилизируема посредством стационарного управления.*

Замечание 3. *Предположим, что система* (1) *не имеет запаздывания, т.е.* $B_\ell = 0$, $\ell = \overline{0, r}$. *Тогда условие* (8) *выполнено. В таком случае теорема 2 совпадает с утверждением* $(1 \Rightarrow 3)$ *теоремы 2* [10]. *Таким образом, теорема 1 вместе с теоремой 2 обобщают результаты теоремы 2* [10] *для билинейных систем без запаздывания на билинейные системы* (1) *с запаздыванием.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18–51–41005) и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки (проект 1.5211.2017/8.9).

Список литературы

1. Ho D.W.C., Lu G., Zheng Y. Global stabilization for bilinear systems with time delay // IEE Proceedings – Control Theory and Applications. 2002. Vol. 149, No. 1. P. 89-94. https://doi.org/10.1049/ip-cta:20020114
2. Liu P.-L. Stabilization criteria for bilinear systems with time-varying delay // Universal Journal of Electrical and Electronic Engineering. 2014. Vol. 2, No. 2. P. 52-58. https://doi.org/10.13189/ujeee.2014.020202

3. Lu G., Ho D.W.C. Solution existence and stabilization for bilinear descriptor systems with time-delay // 2006 9th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision. 2006. https://doi.org/10.1109/ICARCV.2006.345310
4. Niculescu S.-I., Tarbouriech S., Dion J.-M., Dugard L. Stabilization criteria for bilinear systems with delayed state and saturating actuators // Proceedings of 1995 34th IEEE Conference on Decision and Control. 1995. https://doi.org/10.1109/cdc.1995.480652
5. Yoneyama J. Stabilization of Takagi-Sugeno fuzzy bilinear time-delay systems // 2010 IEEE International Symposium on Intelligent Control. 2010. https://doi.org/10.1109/isic.2010.5612886
6. Зайцев В.А. Необходимые и достаточные условия в задаче управления спектром // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 12. С. 1789-1793.
7. Зайцев В.А. Управление спектром в билинейных системах // Дифференциальные уравнения. 2010. Т. 46, № 7. С. 1061-1064.
8. Зайцев В.А., Ким И.Г. Задача назначения конечного спектра в линейных системах с запаздыванием по состоянию при помощи статической обратной связи по выходу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2016. Т. 26, Вып. 4. С. 463-473.
9. Зайцев В.А., Тонков Е.Л. Достижимость, согласованность и метод поворотов В.М. Миллионщикова // Известия вузов. Математика. 1999. № 2. С. 45-56.
10. Зайцев В.А. Согласованные системы и управление спектром собственных значений. I // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 1. С. 117-131.
11. Зайцев В.А. Согласованные системы и управление спектром собственных значений. II // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 6. С. 851-859.