УДК 517.958

# ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ИСТЕКАНИЯ ГАЗА ИЗ СОПЛА (СЛУЧАЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА)

**И.С. Красильщик**
*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: josephkra@gmail.com

**В.В. Лычагин**
*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: valentin.lychagin@uit.no

**Ключевые слова:** газовая динамика, идеальный газ, сопло, групповая классификация.

**Аннотация:** Рассмотрены одномерные уравнения истекания идеального газа из сопла и проведена их групповая классификация в зависимости от входящих в них функциональных параметров.

## 1. Введение

Методы группового анализа дифференциальных уравнений в частных производных (УрЧП) [1] и, более общо, геометрическая теория этих уравнений [2] являются мощным и эффективным средством качественного исследования УрЧП и построения их точных решений. Ниже эти методы применяются к системе уравнений газовой динамики [3], описывающей истекание одномерного идеального газа.

## 2. Основные уравнения

Рассмотрим течение газа в одномерной трубе, площадь сечения которой задана функцией $A = A(x)$. Оно описывается системой уравнений Эйлера

$$(1)\qquad \begin{cases} A\rho(u_t + uu_x) + p_x = 0 & \text{(сохранение импульса)},\\ (A\rho)_t + (A\rho u)_x = 0 & \text{(сохранение массы)},\\ \sigma_t + u\sigma_x = 0 & \text{(адиабатичность)}, \end{cases}$$

где $x$ — пространственная координата, $t$ — время, $u$ — скорость, $p$ — давление, $\rho$ — плотность и $\sigma$ — энтропия. Уравнения состояния идеального газа имеют вид

$$p = R\rho T, \qquad \varepsilon = \frac{n}{2}RT, \qquad \sigma = \ln\left(\frac{\varepsilon^{\frac{n}{2}}}{\rho}\right) + \mathrm{const}, \tag{2}$$

где $T$ — температура, $\varepsilon$ — внутренняя энергия, а $R$ — универсальная газовая постоянная и $n$ — число степеней свободы.

Введём потенциалы $\varphi$ и $\psi$, полагая

$$\begin{cases} \varphi_x = -A\rho u, & \varphi_t = p + A\rho u^2, \\ \psi_x = A\rho, & \psi_t = -A\rho u. \end{cases} \tag{3}$$

Тогда

$$u = \frac{\varphi_x}{\psi_x}, \qquad p = \varphi_t + \frac{\varphi_x^2}{\psi_x}, \qquad \psi_t = \varphi_x,$$

причём функция $\psi$ является первым интегралом векторного поля $\partial/\partial t + u\partial/\partial x$. Потому уравнения (1)–(3) равносильны системе

$$\begin{cases} \varphi_t\psi_x - \varphi_x^2 = A^{-\alpha}F\psi_x^{\alpha+1},, & \psi_x > 0, \\ \varphi_x - \psi_t = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $F = F(\psi)$ — произвольная гладкая функция, а $\alpha = (n+2)/n > 1$.

## 3. Алгебры симметрий

Мы ищем симметрии системы (4) в виде эволюционных векторных полей

$$S_G = \sum_i \left(D_x^i(\Phi)\frac{\partial}{\partial\varphi_i} + D_x^i(\Phi)\frac{\partial}{\partial\psi_i}\right),$$

где $G = (\Phi, \Psi)$ — производящее сечение, $D_x$ — полная производная по $x$ и $\varphi_k$, $\psi_k$ — координаты на бесконечном продолжении, [2]. Мы не делаем различия между симметриями и их произвдящими сечениями. Тогда $G$ находится из уравнений

$$\begin{cases} D_t(\Phi) = \dfrac{\psi_x^\alpha}{A^\alpha}\dfrac{\partial F}{\partial\psi}\Psi + 2\dfrac{\varphi_x}{\psi_x}D_x(\Phi) + \left(\dfrac{F\alpha\psi_x^{\alpha-1}}{A^\alpha} - \dfrac{\varphi_x^2}{\psi_x^2}\right)D_x(\Psi), \\ D_t(\Psi) = D_x(\Phi). \end{cases} \tag{5}$$

Ниже описываются решения 1-го порядка, т.е. зависящие от $t$, $x$, $\varphi$, $\psi$, $\varphi_x$, $\psi_x$. В таблице 1 приведены размерности пространств решений в зависимости от вида функций $F$ и $A$. Алгебры симметрий обозначаются ниже через $\mathfrak{g}$.

Всюду выше $a$, $b$, $c$, $k$, $l$, $s$ — вещественные константы, причём $a$, $b$, $k$, $l$ не равны нулю. Последний столбец и строка таблицы соответствуют функциям общего вида. Ниже для краткости мы пользуемся обозначениями $B = A^{-\alpha}$ и $\Phi = \varphi_x^2/\psi_x$. Кроме того, при описании структуры алгебры Ли мы указываем только ненулевые коммутаторы.

Таблица 1. Размерности алгебр симметрий $\mathfrak{g}$

| | $F=0$ | $F=k$ | $F=ke^{l\psi}$ | $F=(k\psi+s)^l$ | $F$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A=a$ | – | 6 | 5 | 5 | 4 |
| $A=ae^{bx}$ | – | 4 | 4 | – | 3 |
| $A=(ax+c)^b$ | – | 4 | 3 | 3 | 2 |
| $A$ | $\infty$ | 3 | 3 | – | 2 |

$\mathbf{F=0.}$ В этом случае получаемое уравнение линеаризуемо с бесконечномерной алгеброй симметрий. Поскольку оно не зависит от параметров задачи ($A$ и $\alpha$), мы не рассматриваем его в деталях.

$\mathbf{F=k,\ B=a.}$ Алгебра $\mathfrak{g}$ шестимерна и порождена элементами

$$G_1=(1,0),\quad G_2=(\varphi_x,\psi_x),\quad G_3=(\psi+t\varphi_x,t\psi_x),\quad G_4=(0,1),$$
$$G_5=\Big(\alpha(\varphi_x+akt\psi_x^\alpha+t\Phi)+x\varphi_x\Big),\quad G_6=\Big(ak\psi_x^\alpha+\Phi,\varphi_x\Big).$$

Нетривиальные коммутаторы имеют вид

$$[G_1,G_5]=\alpha G_1,\quad [G_2,G_5]=-G_2,\quad [G_3,G_4]=-G_1,$$
$$[G_3,G_5]=(\alpha-1)G_3,\quad [G_3,G_6]=G_2,\quad [G_4,G_5]=G_4,\quad [G_5,G_6]\alpha G_6.$$

$\mathbf{F=k,\ B=ae^{bx}.}$ Четырёхмерная алгебра $\mathfrak{g}$ порождена образующими

$$G_1=(1,0),\quad G_2=\Big(\varphi_x-\frac{b}{2}(\varphi+akte^{bx}\psi_x^\alpha+2t\Phi),\psi_x-\frac{1}{2}bt\varphi_x\Big),$$
$$G_3=(0,1),\quad G_4=\Big(ake^{bx}\psi_x^\alpha+\Phi,\varphi_x\Big)$$

с соотношениями

$$[G_1,G_2]=-\frac{b}{2}G_1,\quad [G_2,G_4]=-\frac{b}{2}G_4.$$

$\mathbf{F=k,\ B=(ax+c)^b.}$ Здесь также $\dim\mathfrak{g}=4$, а образующими являются вектор-функции

$$G_1=(1,0),\quad G_2=(0,1),$$
$$G_3=\Big(\frac{2\alpha-b}{2}(kt(ax+c)^b\psi_x^\alpha+\varphi)+\frac{ax+c}{a}\varphi_x+\frac{2\alpha-b}{2}t\Phi,$$
$$\frac{ax+c}{a}\psi_x+\frac{2\alpha-b}{2}t\varphi_x\Big),\quad G_4=\Big(k(ax+c)^b\psi_x^\alpha+\Phi,\varphi_x\Big),$$

которые подчиняются соотношениям

$$[G_1,G_3]=\Big(\alpha-\frac{b}{2}\Big)G_1,\quad [G_2,G_3]=G_2,\quad [G_3,G_4]=\Big(\alpha-\frac{b}{2}\Big)G_4.$$

$\mathbf{F=k,\ B.}$ Алгебра симметрий является трёхмерной коммутативной алгеброй с образующими

$$G_1=(1,0),\quad G_2=(0,1),\quad G_3=\Big(kB\psi_x^\alpha+\Phi,\varphi_x\Big).$$

**$\mathbf{F = ke^{l\psi}, B = a}$.** Алгебра $\mathfrak{g}$ пятимерна и порождена элементами.

$$G_1 = (1,0), \quad G_2 = (\varphi_x, \psi_x), \quad G_3 = (\psi + t\varphi_x, t\psi_x),$$
$$G_4 = \Big(\frac{l}{2}(\varphi + akte^{l\psi}\psi_x^\alpha + t\Phi), 1 + \frac{1}{2}lt\varphi_x\Big), \quad G_5 = \Big(ake^{l\psi}\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x\Big).$$

Нетривиальные соотношения суть

$$[G_1, G_4] = \frac{l}{2}G_1 \quad [G_3, G_4] = \frac{l}{2}G_3 - G_1, \quad [G_3, G_5] = G_2, \quad [G_4, G_5] = \frac{l}{2}G_5.$$

**$\mathbf{F = ke^{l\psi}, B = ae^{bx}}$.** Алгебра четырёхмерна с образующими

$$G_1 = (1,0), \quad G_2 = \Big(\varphi_x - \frac{b}{2}(\varphi + akte^{bx+l\psi}\psi_x^\alpha) + bt\Phi, \psi_x - \frac{b}{2}t\varphi_x\Big),$$
$$G_3 = \Big(\frac{l}{2}(\varphi + akte^{bx+l\psi}\psi_x^\alpha) + t\Phi, 1 + \frac{l}{2}t\varphi_x\Big),$$
$$G_4 = \Big(kae^{bx+l\psi}\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x\Big)$$

и соотношениями

$$[G_1, G_2] = -\frac{b}{2}G_1, [G_1, G_3] = \frac{l}{2}G_1, \quad [G_2, G_4] = -\frac{b}{2}G_4, \quad [G_3, G_4] = \frac{l}{2}G_4.$$

**$\mathbf{F = ke^{l\psi}, B = (ax + c)^b}$.** Алгебра симметрий трёхмерна и порождена элементами

$$G_1 = (1,0), \quad G_2 = \Big(\frac{l}{2}(\varphi + kt(ax+c)^b e^{l\psi}\psi_x^\alpha) + t\Phi, 1 + \frac{l}{2}t\varphi_x\Big),$$
$$G_3 = \Big(k(ax+c)^b e^{l\psi}\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x\Big),$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$[G_1, G_2] = \frac{l}{2}G_1, \quad [G_2, G_3] = \frac{l}{2}G_3.$$

**$\mathbf{F = ke^{l\psi}, B}$.** В этом случае алгебра $\mathfrak{g}$ также трёхмерна с образующими

$$G_1 = (1,0), \quad G_2 = \Big(\frac{l}{2}(\varphi + ktBe^{l\psi}\psi_x^\alpha) + t\Phi, 1 + \frac{l}{2}t\varphi_x\Big),$$
$$G_3 = \Big(kBe^{l\psi}\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x\Big)$$

и соотношениями

$$[G_1, G_2] = \frac{l}{2}G_1, \quad [G_2, G_3] = \frac{l}{2}G_3.$$

**$\mathbf{F = (k\psi + s)^l, B = a}$.** Пятимерная алгебра $\mathfrak{g}$ порождена симметриями

$$G_1 = (1,0), \quad G_2 = (\varphi_x, \psi_x), \quad G_3 = (\psi + t\varphi_x, t\psi_x),$$
$$G_4 = \Big(\big(\alpha + \frac{l}{2}\big)(\varphi + at(k\psi + s)^l\psi_x^\alpha + t\varphi_x) + x\varphi_x + \alpha t\varphi_x^2 + lt\Phi, \psi + x\psi_x + \frac{s}{k}\Big),$$
$$G_5 = \Big(a(k\psi + s)^l\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x\Big),$$

которые подчиняются соотношениям

$$[G_1, G_4] = \Big(\alpha + \frac{l}{2}\Big)G_1, \quad [G_2, G_4] = -G_2, \quad [G_3, G_4] = \Big(\alpha - 1 + \frac{l}{2}\Big)G_3 - \frac{s}{k}G_1,$$
$$[G_3, G_5] = G_2, \quad [G_4, G_5] = \Big(\alpha + \frac{l}{2}\Big)G_5.$$

**$\mathbf{F} = (\mathbf{k}\psi + \mathbf{s})^{\mathbf{l}}$, $\mathbf{B} = (\mathbf{ax} + \mathbf{c})^{\mathbf{b}}$.** Алгебра симметрий трёхмерна с образующими

$$G_1 = (1, 0),$$
$$G_2 = \Big(\frac{l + 2\alpha - b}{2}(\varphi\psi_x + \psi_x^\alpha(k\psi + s)^l(ax + c)^b t + t\Phi) + \frac{ax + c}{a}\varphi_x,$$
$$\frac{l + 2\alpha - b}{2}t\varphi_x + \frac{ax + c}{a}\psi_x + \psi + \frac{s}{k}\Big),$$
$$G_3 = \Big(\psi_x^\alpha(k\psi + s)^l(ax + c)^b + \Phi, \varphi_x\Big)$$

и соотношениями

$$[G_1, G_2] = \Big(\frac{\alpha b + l}{2} + \alpha\Big)G_1, \quad [G_2, G_3] = \Big(\frac{\alpha b + l}{2} + \alpha\Big)G_3.$$

**F, $\mathbf{B} = \mathbf{a}$.** Алгебра симметрий порождена элементами

$$G_1 = (1, 0), \quad G_2 = (\varphi_x, \psi_x), \quad G_3 = (\psi + t\varphi_x, t\psi_x), \quad G_4 = (aF\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x)$$

с единственным нетривиальным соотношением $[G_3, G_4] = G_2$.

**F, $\mathbf{B} = \mathbf{ae^{bx}}$.** Трёхмерная алгебра $\mathfrak{g}$ имеет образующие

$$G_1 = (1, 0), \quad G_2 = \Big(\frac{b}{2}(\varphi + ate^{bx}F\psi_x^\alpha + t\Phi) - \varphi_x, \psi_x - \frac{b}{2}t\varphi_x\Big),$$
$$G_3 = \Big(ae^{bx}F\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x\Big),$$

которые подчинены соотношениям

$$[G_1, G_2] = -\frac{b}{2}G_1, \quad [G_2, G_3] = -\frac{b}{2}G_3.$$

**F, $\mathbf{B} = (\mathbf{ax} + \mathbf{c})^{\mathbf{b}}$.** Алгебра симметрий является двумерной коммутативной алгеброй с образующими

$$G_1 = (1, 0), \quad G_2 = ((ax + c)^b F\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x).$$

**F, B.** Как и предыдущем пункте, алгебра двумерна и коммутативна. Образующие суть

$$G_1 = (1, 0), \quad G_2 = (BF\psi_x^\alpha + \Phi, \varphi_x).$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-29-10013).

## Список литературы


1. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953.