УДК 534.21, 517.957, 514.86

# НЕЛИНЕЙНЫЙ ЗВУКОВОЙ ПУЧОК В СРЕДЕ С ДИССИПАЦИЕЙ

**А.Г. Кушнер**
*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: kushner@physics.msu.ru

**О.И. Чигур**
*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН*
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: riman1703@gmail.com

**Ключевые слова:** нелинейная акустика, ограниченный акустический пучок, управление фокусировкой, уравнение Хохлова–Заболоцкой, уравнение Кузнецова.

**Аннотация:** В докладе найдена алгебра симметрий и построены серии точных решений уравнения Кузнецова, описывающего распространение акустического ограниченного пучка в среде с учетом рассеяния энергии. Некоторые из построенных решений имеют особенности, которые соответствуют явлению фокусировки пучка. Возможность управления фокусировкой ограниченного звукового пучка в среде без учета дисперсии, была открыта В.В. Лычагиным. Результаты, представленные в докладе, обосновывают возможность управления фокусировкой и при наличии дисперсии.

Распространение ограниченных звуковых пучков в нелинейных диссипативных средах описывается дифференциальным уравнением Кузнецова [4], которое имеет следующий вид:

$$\rho_{\tau x} = \alpha\left(\rho\rho_{\tau\tau} + \rho_\tau^2\right) + \frac{c_0}{2}\Delta_\perp\rho + \beta\rho_{\tau\tau\tau}. \tag{1}$$

Предполагается, что звуковой пучок распространяется в направлении оси $x$, $\Delta_\perp$ — оператор Лапласа по переменным $y$ и $z$, $\tau = t - xc_0^{-1}$ — нормированное время, $c_0$ — скорость звука в среде, $\rho$ — отклонение плотности среды от равновесной, $\alpha = (\gamma+1)/(2c_0^2)$, $\gamma$ — показатель адиабаты, $\beta$ — числовой параметр, характеризующий диссипативность среды.

При $\beta = 0$ уравнение (1) представляет собой уравнение Хохлова–Заболоцкой [7]. В работе [1] приводятся методы численного анализа и результаты вычислительных экспериментов для этого уравнения.

В 1979 году В.В. Лычагин [5] построил точные решения уравнения Хохлова–Заболоцкой, которым отвечает явление самофокусировки звукового пучка, открытое ранее экспериментально [6].

Оказалось, что если амплитуду звукового пучка менять по определенному закону вблизи генератора звука, то на некотором расстоянии от него произойдет фокусировка пучка. Это явление уже существенно отличается от явления самофокусировки и указывает метод управления звуковым пучком [10,11]. Решения уравнения Хохлова–Заболоцкой, моделирующие фокусировку, имеют слабый разрыв (разрыв производных) и их получение было основано на понятии многозначных решений дифференциальных уравнений [2].

Отметим, что трехмерность пучка, по-видимому, играет существенную роль, так как для одно- и двумерных моделей не удалось найти решений, отвечающих явлению фокусировки.

В данном докладе приводится алгебра симметрий уравнения Кузнецова и приведены его точные решения, которые показывают, что явление фокусировки имеет место и для этой модели.

Для упрощения вида уравнения (1) нормируем независимые переменные:

$$\tau \to \frac{\tau}{\alpha}, \quad x \to x, \quad y \to \sqrt{\frac{2}{\alpha c_0}}y, \quad z \to \sqrt{\frac{2}{\alpha c_0}}z.$$

Тогда уравнение Кузнецова примет вид

$$\rho_{\tau x} = \rho\rho_{\tau\tau} + \rho_\tau^2 + \rho_{yy} + \rho_{zz} + \lambda\rho_{\tau\tau\tau}, \tag{2}$$

где $\lambda = \beta\alpha^{-2}$. Далее полагаем, что $\lambda \neq 0$.

**Теорема 1.** *Алгебра Ли точечных симметрий уравнения (2) бесконечномерна и порождена векторными полями*

$$\begin{aligned}
&X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z,\\
&X_4 = z\partial_y - y\partial_z,\\
&X_5 = 2t\partial_t + 4x\partial_x + 3y\partial_y + 3z\partial_z - 2\rho\partial_\rho,\\
&X_f = f'(x)y\partial_t + 2f(x)\partial_y - f''(x)y\partial_\rho,\\
&X_g = g'(x)z\partial_t + 2g(x)\partial_z - g''(x)z\partial_\rho,\\
&X_h = h(x)\partial_t - h'(x)\partial_\rho.
\end{aligned}$$

*Здесь $f(x), g(x), h(x)$ — произвольные функции.*

Теорема доказывается прямыми вычислениями.

Исходя из физического смысла, решения уравнения (2) должны убывать при удалении от оси $x$, то есть должно выполняться условие $\lim \rho = 0$ когда $y^2 + z^2 \to \infty$. Это условие нужно учитывать при выборе симметрий при построении соответствующих инвариантных решений. А именно, физические симметрии должны сохранять решения, убывающие на бесконечности, т.е. когда $y^2 + z^2 \to \infty$.

Рассмотрим векторное поле $X_f$. Преобразование сдвига вдоль траекторий этого векторного поля имеет вид:

$$\begin{cases}
\tau = f'(x)(f(x)s^2 + ys) + \tau_0,\\
x = x_0,\\
y = 2f(x)s + y_0,\\
z = z_0,\\
\rho = f''(x)(f(x)s^2 + y_0 s) + \rho_0.
\end{cases} \tag{3}$$

Здесь $s$ — параметр сдвига, $\tau_0, x_0, y_0, z_0, \rho_0$ — начальные данные. Пусть $\rho_0(\tau_0, x_0, y_0, z_0, \rho_0)$ — ограниченное на бесконечности решение. Преобразование (3) переводит его в решение

$$\rho = f(x)f''(x)s^2 + f''(x)y_0 s + \rho_0 + \rho_0(\tau_0, x_0, y_0, z_0, \rho_0).$$

Таким образом, если $f''(x) \neq 0$, то $u \to \infty$ при $y_0 \to \infty$. Поэтому условие $f''(x) = 0$ должно выполняться. Легко заметить, что это условие является достаточным.

Аналогично можно показать, что необходимым и достаточным условием сохранения убывания на бесконечности решений является условие $g''(x) = 0$.

Рассмотрим теперь векторное поле $X_h$. Преобразование сдвига вдоль траекторий этого векторного поля имеет вид:

$$\begin{cases} \tau = h(x)s + \tau_0, \\ x = x_0, \\ y = y_0, \\ z = z_0, \\ \rho = -f'(x)s + \rho_0. \end{cases} \tag{4}$$

Пусть $\rho_0(\tau_0, x_0, y_0, z_0, \rho_0)$ — ограниченное на бесконечности решение. Преобразование (4) переводит его в решение

$$\rho = -f'(x)s + \rho_0(\tau_0, x_0, y_0, z_0, \rho_0).$$

Таким образом,поток векторного поля $X_h$ любое ограниченное решение переводит в решение, которое также ограниченно на бесконечности.

В результате получим, что функции $f(x)$ и $g(x)$ являются линейным, а функция $h$ — произвольная. Поэтому можно положить $f(x) = g(x) = x$.

Таким образом, физически осмысленная подалгебра алгебры Ли симметрий уравнения (2) является конечномерной подалгеброй $\mathfrak{g}$, порожденной векторными полями $X_1, \ldots, X_5$ и

$$X_6 = y\partial_\tau + 2x\partial_y, \quad X_7 = z\partial_\tau + 2x\partial_z, \quad X_h.$$

Если положить $h(x) = 1$, то получим векторное поле $X_h = \partial_\tau$. Тогда получим конечномерную алгебру Ли, структурная таблица которой представлена в Таблице 1. Здесь $X_8 = \partial_\tau$.

Подалгебра $\mathfrak{g}$ может быть использована для построения точных решений уравнения (2). В качестве примера рассмотрим трехмерную подалгебру, порожденную векторными полями $X_2, X_5, X_7$. Базовые дифференциальные инварианты этой подалгебры имеют вид

$$\rho\sqrt{x}, \qquad \frac{z^2 - 4tx}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

Поэтому инвариантное решение уравнения (2) ищем в виде

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{x}} U\left(\frac{z^2 - 4tx}{x^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Таблица 1. Коммутационные соотношения в подалгебре Ли $\mathfrak{g}$

| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | $X_8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{4}{3}X_1$ | $2X_2$ | $2X_3$ | 0 |
| $X_2$ | 0 | 0 | 0 | $-X_3$ | $X_2$ | $X_8$ | 0 | 0 |
| $X_3$ | 0 | 0 | 0 | $X_2$ | $X_3$ | 0 | $X_8$ | 0 |
| $X_4$ | 0 | $X_3$ | $-X_2$ | 0 | 0 | $X_7$ | $-X_6$ | 0 |
| $X_5$ | $-\frac{4}{3}X_1$ | $-X_2$ | $-X_3$ | 0 | 0 | $\frac{1}{3}X_6$ | $\frac{1}{3}X_7$ | $-\frac{2}{3}X_8$ |
| $X_6$ | $-2X_2$ | $-X_8$ | 0 | $-X_7$ | $-\frac{1}{3}X_6$ | 0 | 0 | 0 |
| $X_7$ | $-2X_3$ | 0 | $-X_8$ | $X_6$ | $-\frac{1}{3}X_7$ | 0 | 0 | 0 |
| $X_8$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $\frac{2}{3}X_8$ | 0 | 0 | 0 |

Редуцированное уравнение имеет вид

$$32aU'' + 8UU' + sU = 0,$$

где $U = U(s)$, $s = (z^2 - 4tx)x^{-\frac{3}{2}}$. Общее решение редуцированного уравнения довольно громоздко и записывается в терминах функции Ламберта. Однако оно имеет частное решение $U(s) = -s/8$. Соответствующее решение уравнения (2) имеет вид

$$\rho = \frac{4tx - z^2}{8x^2}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (18-29-10013).

# Список литературы


1. Бахвалов Н.С., Жилейкин Я.М., Заболотская Е.А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982.
2. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1986. 336 с.
3. Заболотская Е.А., Хохлов Р.В. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков // Акуст. журн. 1969. Т. 15, № 1. С. 40-47.
4. Кузнецов В.П. Уравнения нелинейной акустики // Акуст. журнал. 1970. Т. 16, №о 4. С. 548-553.
5. Лычагин В.В. Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 1 (205). С. 137–165.
6. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
7. Руденко О.В. К 40-летию уравнения Хохлова–Заболоцкой // Акуст. журнал. 2010. Т. 56, № 4. С. 452-462 .
8. Чигур О.И. Точные сингулярные решения уравнения Хохлова—Заболотской—Кузнецова // Уч. зап. физич. факультета МГУ. 2018. № 4. С. 1840602.
9. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / Ред. А.М. Виноградов, И.С. Красильщик. М.: Факториал Пресс, 2005. 380 с.
10. Kushner A.G., Lychagin V.V., Rubtsov V.N. Contact geometry and nonlinear differential equations // Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 101. Cambridge: Cambridge University Press. 2007. xxii+496 p.
11. Lychagin V.V. Singularities of multivalued solutions of nonlinear differential equations and nonlinear Phenomena // Acta Appl. Math. 1985. No. 3. P. 135-173.