УДК 534.21, 517.957, 514.86

АЛГЕБРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТОВ УРАВНЕНИЙ РАПОПОРТА–ЛИСА

Е.Н. Кушнер

Московский государственный технический университет гражданской авиации

Россия, 125993, Москва, Кронштадтский бульвар, 20

E-mail: ekushner@ro.ru

Ключевые слова: управление фильтрацией, дифференциальные инварианты, группы и алгебры Ли, джеты.

Аннотация: Для обобщенных уравнений Рапопорта–Лиса построена алгебра дифференциальных инвариантов относительно точечных преобразований. Такие уравнения возникают при изучении процессов многофазной фильтрации в пористых средах, в частности при разработке нефтяных месторождений.

Обобщенные уравнения Рапопорта–Лиса представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными. В работе используются методы геометрической теории дифференциальных уравнений. Согласно этой теории дифференциальные уравнения порождают подмногообразия в пространстве джетов. Это позволяет использовать аппарат современной дифференциальной геометрии для исследования дифференциальных уравнений. Вводится понятие допустимых преобразований, то есть замен переменных, не выводящих уравнения за пределы класса уравнений Рапопорта–Лиса. Такие преобразования образуют группу Ли. Для этой группы Ли находятся дифференциальные инварианты, которые разделяют ее регулярные орбиты, что позволяет классифицировать обобщенные уравнения Рапопорта—Лиса.

Обобщенные уравнения Рапопорта–Лиса имеет следующий вид [2,6]:

$$u_t = A(u)_x + B(u)_{xx}, \tag{1}$$

где $u = u(t,x)$ — неизвестная функция, A и B — функции от переменной u, которые мы будем считать бесконечно дифференцируемыми. Эти уравнения описывают различные физические процессы: двухфазную фильтрацию в пористой среде, фильтрацию политропного газа, распространение тепла при ядерном взрыве [3].

В данной работе построена алгебра дифференциальных инвариантов уравнений (1) относительно точечных преобразований. А именно, среди точечных преобразований выделяются преобразования, сохраняющие класс обобщенных уравнений Рапопорта–Лиса. Такие преобразования мы называем допустимыми. Они образуют группу Ли, а ее дифференциальные инварианты являются также и дифференциальными инвариантами обобщенных уравнений Рапопорта–Лиса. Допустимые преобразования построены в работе [5]. В работе [2] найдены конечномерные динамики таких уравнений и условия существования аттракторов.

Уравнение (1) можно записать в виде

$$u_t = A'(u)u_x + B'(u)u_{xx} + B''(u)u_x^2. \tag{2}$$

Для упрощения вычислений обозначим

$$a(u) = A'(u), \qquad b(u) = B'(u)$$

и вместо уравнения (2) будем рассматривать уравнение

$$u_t = a(u)u_x + b(u)u_{xx} + b'(u)u_x^2. \tag{3}$$

Базис алгебры Ли векторных полей, порождающих группу Ли допустимых преобразований, имеет вид [5]:

$$\frac{\partial}{\partial t}, \quad t\frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial x}, \quad t\frac{\partial}{\partial x}, \quad x\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial u_{0,0}}, \quad u_{0,0}\frac{\partial}{\partial u_{0,0}}.$$

Группа Ли допустимых преобразований порождена трансляциями и растяжениями вдоль осей координат $t, x, u_{0,0}$, а также одним обобщенным растяжением вдоль оси x.

Введем пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами u, a, b и пространство $\mathbb{R}^2$ с координатами a, b и определим тривиальное расслоение

$$\pi_{RL} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad \pi_{RL} : (u, a, b) \mapsto (a, b).$$

Это расслоение будем называть *расслоением Рапопорта–Лиса* или расслоением RL.

Допустимые преобразования, ограниченные на расслоение Рапопорта–Лиса, образуют пятимерную группу Ли, которую обозначим через G_{RL}. Соответствующая алгебра Ли $\mathcal{G}_{RL}$ порождена векторными полями

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_2 = u\frac{\partial}{\partial u}, \quad Y_3 = \frac{\partial}{\partial a}, \quad Y_4 = a\frac{\partial}{\partial a}, \quad Y_5 = b\frac{\partial}{\partial b}.$$

Пусть $J^k(\pi_{RL})$ — пространство k-джетов сечений расслоения RL и $u, a_0, b_0, \ldots, a_k, b_k$ — канонические координаты на этом пространстве.

Дифференциальным инвариантом порядка k группы Ли G_{RL} (и обобщенных уравнений Рапопорта–Лиса) называется функция J на пространстве k-джетов расслоения RL, постоянная на орбитах продолженной в пространство $J^k(\pi_{RL})$ группы Ли G_{RL} [1].

При этом функция J является решением системы пяти линейных дифференциальных уравнений $J^k(\pi_{RL})$

$$Y_i^{(k)}(J) = 0, \quad i = 1, \ldots, 5. \tag{4}$$

Здесь $Y_i^{(k)}$ — продолжение векторного поля Y_i в пространство $J^k(\pi_{RL})$.

Дифференциальные инварианты образуют алгебру относительно операции сложения и умножения, то есть если J_1 и J_2 — дифференциальные инварианты, то их сумма $J_1 + J_2$ и произведение J_1J_2 также являются дифференциальными инвариантами.

Дифференциальные инварианты $J_1, \dots, J_s$ порядка $\leqslant k$ называются *базовыми*, если они функционально независимы и любой другой дифференциальный инвариант порядка $\leqslant k$ является функцией от них. В этом случае число s называется *размерностью* алгебры дифференциальных инвариантов порядка $\leqslant k$.

Размерность алгебры дифференциальных инвариантов порядка $\leqslant k$ равна коразмерности регулярной орбиты группы Ли $G_{RL}^{(k)}$.

В нашем случае точка $\theta \in J^k(\pi_{RL})$ является регулярной, если ранг системы касательных векторов $Y_{1,\theta}^{(k)}, \dots, Y_{5,\theta}^{(k)}$ максимален.

Это означает, например, что в пространстве $J^0(\pi_{RL})$ регулярными являются все точки, в которых ни одна из координат u, a_0, b_0 не обращается в нуль.

В пространстве $J^k(\pi_{RL})$ точки, в которых ни одна из координат $u, a_0, b_0, \dots, a_k, b_k$ не обращается в нуль, также являются регулярными. Это следует из вида векторных полей

$$\begin{aligned}
Y_1^{(k)} =& \frac{\partial}{\partial u},\\
Y_2^{(k)} =& u\frac{\partial}{\partial u} - \sum_{i=1}^{k} i\left(a_i\frac{\partial}{\partial a_i} + b_i\frac{\partial}{\partial b_i}\right),\\
Y_3^{(k)} =& \frac{\partial}{\partial a_0},\\
Y_4^{(k)} =& \sum_{j=0}^{k} a_j\frac{\partial}{\partial a_j},\\
Y_5^{(k)} =& \sum_{j=0}^{k} b_j\frac{\partial}{\partial b_j}.
\end{aligned}$$

Первые два нетривиальных дифференциальных инварианта имеют порядок два. Действительно,

$$\dim J^k(\pi_{RL}) = 2k + 3,$$

а размерность регулярной орбиты равна пяти. Эти инварианты мы получаем, решая систему (4) для $k = 2$:

$$J_{2,1} = \frac{a_2 b_0}{a_1 b_1}, \qquad J_{2,2} = \frac{b_0 b_2}{b_1^2}.$$

Легко подсчитать, что размерность алгебры дифференциальных инвариантов порядка $\leqslant k$ равна $2k$ $(k \geqslant 2)$. При этом порядок равный ровно k имеют только два инварианта.

Несложно проверить, что оператор

$$\nabla = \frac{b_0}{b_1}\frac{d}{du}$$

является оператором инвариантного дифференцирования.

Теорема 1. *Алгебра дифференциальных инвариантов обобщенных уравнений Рапопорта–Лиса порождена двумя базовыми инвариантами второго порядка* $J_{2,1} = \dfrac{a_2 b_0}{a_1 b_1}$ *и* $J_{2,2} = \dfrac{b_0 b_2}{b_1^2}$ *и одним инвариантным дифференцированием* $\nabla = \dfrac{b_0}{b_1}\dfrac{d}{du}$. *Эта алгебра разделяет регулярные орбиты группы Ли* G_{RL}.

Список литературы

1. Алексеевский Д.В., Виноградов, А.М., Лычагин В.В. Основные понятия дифференциальной геометрии // Итоги науки и техники. Серия «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». М.: ВИНИТИ, 1988. Т. 28. 297 с.
2. Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В. Аттракторы в моделях фильтрации // Доклады акад. наук. 2017. Т. 472. № 6. С. 627-630.
3. Баренблатт Г.И. Нелинейная фильтрация: прошлое, настоящее и будущее // В сборнике «Проблемы теории фильтрации и механика процессов повышения нефтеотдачи». М.: Наука, 1987. С. 15-27.
4. Виноградов А.М., Красильщик И.С., Лычагин В.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1986. 336 с.
5. Кушнер Е.Н. Инварианты обобщенных уравнений Рапопорта-Лиса // Научный Вестник МГТУ ГА. 2018. Т. 21, № 2. С. 96-104.
6. Rapoport L., Leas W. Properties of linear waterflood // AIME Trans. 1953. 198. P. 139-148.