УДК 514.17

# ВЫПУКЛАЯ ТРИГОНОМЕТРИЯ В ЗАДАЧАХ С ДВУМЕРНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

**Л.В. Локуциевский**
*Математический институт имени В.А. Стеклова РАН*
Россия, 119991, Москва, ул. Губкина, д. 8
E-mail: lion.lokut@gmail.com

**Ключевые слова:** выпуклая тригонометрия, двумерное управление, финслерова геометрия.

**Аннотация:** На докладе будет рассказано о новом удобном методе описания плоских выпуклых компактных множеств и их поляр, обобщающем классические тригонометрические функции sin и cos. По-видимому, этот метод может оказаться очень полезным для явного нахождения решений задач оптимального управления с двумерным управлением. С его помощью недавно удалось построить явные решения в серии задач с двумерным управлением, которые до это не поддавались точному исследованию.

Пусть $\Omega$ – произвольное выпуклое компактное множество на плоскости $\mathbb{R}^2$, содержащее начало координат во внутренности $0 \in \operatorname{Int}\Omega$. Если в некоторой задаче оптимального управления двумерное управление лежит в $\Omega$, то часто из принципа максимума Понтрягина следует, что оптимальное управление должно двигаться вдоль границы $\Omega$. В случае, когда $\Omega$ – это круг, движение точки по окружности удобно описывать в терминах тригонометрических функций cos и sin. Однако, когда $\Omega$ отличается от круга, тригонометрические функции подходят плохо. Например, в случае, когда $\Omega$ – многоугольник, для явного построения оптимальной траектории часто приходится кропотливо рассматривать все возможные скачки управления с одной вершины на другую.

На докладе я расскажу о совершенно ином подходе, основанном на введении новых функций $\cos_\Omega$ и $\sin_\Omega$, которые часто позволяют удобно описать динамику точки на границе $\Omega$ явно, просто и без громоздких формул. В случае, когда $\Omega$ – это единичный круг с центром в начале координат, функции $\cos_\Omega$ и $\sin_\Omega$ совпадают с классическими тригонометрическими функциями. В случае произвольного множества $\Omega$ они, во-первых, наследуют много удобных свойств классических функций cos и sin, а, во вторых, могут быть явно найдены для очень большого числа конкретных множеств $\Omega$. Оказывается, что свойства одной пары тригонометрических функций cos и sin, наследуются двумя парами обобщенных тригонометрических функций $\cos_\Omega$, $\sin_\Omega$ и $\cos_{\Omega^\circ}$, $\sin_{\Omega^\circ}$ (здесь $\Omega^\circ$ – поляра $\Omega$).

С помощью этой техники удалось найти явные решения в большой серии задач с двумерным управлением из $\Omega$ (см. [3]). Сформулирую некоторые из этих задач на языке оптимального управления: рассматриваются следующие задачи быстродействия,

$$T \to \min$$

при условии, что управление $u = (u_1, u_2)$ двумерно и лежит в $\Omega$:

1. Финслерова геометрия на плоскости Лобачевского:

$$\dot{x} = yu_1; \quad \dot{y} = yu_2; \quad u \in \Omega$$

2. Задача управления яхтой (обобщенная машина Дуббинса)

$$\dot{x}_1 = u_1; \quad \dot{x}_2 = u_2; \quad u \in \Omega$$

   Дополнительно в этой задаче мы ограничиваем скорость движения $u$ вдоль границы $\Omega$, запрещая, например, скачки управления.

3. Задача Грушина

$$\dot{x}_1 = u_1; \quad \dot{x}_2 = x_1 u_2; \quad u \in \Omega.$$

4. Задача Дидоны с финслеровой длиной

$$\dot{x}_1 = u_1; \quad \dot{x}_2 = u_2; \quad \dot{z} = \frac{1}{2}(x_1 u_2 - x_2 u_1); \quad u \in \Omega.$$

5. Задача Мартине

$$\dot{x}_1 = u_1; \quad \dot{x}_2 = u_2; \quad \dot{w} = -\frac{1}{2} x_2^2 u_1; \quad u \in \Omega.$$

6. На группе Энгеля

$$\dot{x}_1 = u_1; \quad \dot{x}_2 = u_2; \quad \dot{z} = \frac{1}{2}(x_1 u_2 - x_2 u_1);$$
$$\dot{w} = -\frac{1}{2} x_2^2 u_1; \quad u \in \Omega.$$

7. На группе Картана (обобщенная задача Дидоны)

$$\dot{x}_1 = u_1; \quad \dot{x}_2 = u_2; \quad \dot{z} = \frac{1}{2}(x_1 u_2 - x_2 u_1);$$
$$\dot{w}_1 = \frac{1}{2} x_1^2 u_2; \quad \dot{w}_2 = -\frac{1}{2} x_2^2 u_1; \qquad u \in \Omega.$$

Во всех этих задачах удалось найти явные формулы для решений с помощью функций $\cos_\Omega$ и $\sin_\Omega$. Также с помощью этих функций удалось получить явные формулы в обобщенной задаче об Эйлеровых эластиках, в задаче Рица-Шеппа и в задаче о качении шара[1]. Отмечу, что задача 4 была решена в 1947 г. для замкнутых кривых с помощью теоремы Брунна-Минковского и без использования принципа максимума

[1]Часть из перечисленных задач решена совместно с Ю.Л. Сачковым и А.А. Ардентов.

Понтрягина, см. [1]. Позже она рассматривалась очень большим количеством авторов во множестве разных вариаций. Задачи 5,6 и 7 для одного частного случая, когда $\Omega$ – квадрат, были решены в 2017-2018 г., см. [2, 4].

Еще раз подчеркну, что для очень многих конкретных множеств $\Omega$ новые функции $\cos_\Omega$ и $\sin_\Omega$ могут быть легко выражены через элементарные (а, значит, и найденные через них явные решения всех перечисленных задач оптимального управления). Например, если $\Omega$ – это произвольный выпуклый многоугольник, то функции $\cos_\Omega$ и $\sin_\Omega$ оказываются кусочно-линейными и без труда находятся через координаты вершин. Другой пример $\Omega$ – эллипс (не обязательно центрированный в начале координат). В этом случае функции $\cos_\Omega$ и $\sin_\Omega$ выражаются через классические функции cos и sin. Еще один важный пример, когда граница множества $\Omega$ заданна численно. В этом случае функции $\cos_\Omega$ и $\sin_\Omega$ также без труда вычисляются численно.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 17-01-00805 и 17-01-00809.

# Список литературы

1. Busemann H. The Isoperimetric Problem in the Minkowski Plane // American Journal of Mathematics. 1947. Vol. 69, No. 4, P. 863-871
2. Barilari D., Boscain U., Le Donne E., Sigalotti M. Sub-Finsler Structures from the Time-Optimal Control Viewpoint for some Nilpotent Distributions // Journal of Dynamical and Control Systems. 2017. Vol. 23, No. 3, P. 547-575.
3. Lokutsievskiy L.V. Convex trigonometry with applications to sub-Finsler geometry // 2018. arXiv:1807.08155
4. A. Ardentov, E. Le Donne, Yu. Sachkov. Sub-Finsler geodesics on the Cartan group // 2018. arXiv:1810.05431