УДК 517.977, 514.765

СИММЕТРИЧНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ В ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

А.В. Подобряев

Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН

Россия, 152021, Ярославская обл., Переславский р-н, с. Веськово, ул. Петра I, 4а

E-mail: alex@alex.botik.ru

Ключевые слова: геометрическая теория управления, субриманова геометрия, множество разреза, точки Максвелла, симметрия.

Аннотация: Рассматриваются левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли, таких, что стабилизатор общего положения коприсоединенного представления связен. Приводится общая конструкция продолжения симметрий вертикальной подсистемы принципа максимума Понтрягина до симметрий экспоненциального отображения. Эти симметрии играют ключевую роль в исследовании экстремальных траекторий на оптимальность.

1. Введение

В геометрической теории управления (см., например, [1]) рассматриваются левоинвариантные задачи оптимального управления на группе Ли G. Задано семейство гладких левоинвариантных векторных полей f_u, зависящих от $u \in U \subset \mathbb{R}^n$, и левоинвариантная аналитическая функция $\varphi : G \times U \to \mathbb{R}$. Требуется найти $u \in L^\infty([0, t_1], U)$ такое, что

$$\dot{q} = f_{u(t)}(q(t)), \qquad q(0) = \mathrm{id}, \qquad q(t_1) = q_1 \in G, \qquad \int_0^{t_1} \varphi(q_u(t), u(t))dt \to \min .$$

В частности, такую постановку допускают задачи поиска кратчайших римановой и субримановой геометрии [2].

Принцип максимума Понтрягина [3] дает необходимое условие оптимальности. Пусть H — гамильтониан принципа максимума Понтрягина, а $\vec{H}$ — соответствующее гамильтоново векторное поле. Для левоинвариантных задач гамильтонова система становится треугольной, т.е. сопряженная подсистема не зависит от переменных состояния. При исследовании нормальных экстремальных кривых на глобальную оптимальность ключевую роль играют симметрии задачи, индуцированные симметриями сопряженной подсистемы. Получены достаточные условия для продолжения симметрий сопряженной подсистемы до симметрий экспоненциального отображения (отображения в конец экстремальной траектории). Дадим необходимые определения.

Определение 1. *Точкой Максвелла называется точка, в которую приходят две различные экстремальные траектории с одними и теми же значениями максимизируемого функционала и времени.*

Известно (см., например, [4]), что после точки Максвелла экстремальная траектория не может быть оптимальной. Поэтому описание точек Максвелла играет важную роль в исследовании экстремальных траекторий на оптимальность. В частности, время Максвелла доставляет верхнюю оценку времени потери оптимальности (время разреза). Естественной причиной возникновения точек Максвелла может быть симметрия экстремальных траекторий.

Определение 2. *Экспоненциальным отображением называется отображение в конец экстремальной траектории, а именно*

$$\mathrm{Exp} : \mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+ \to G, \qquad \mathrm{Exp}(p,t) = \pi e^{t\vec{H}}(\mathrm{id}, p), \qquad (p,t) \in \mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+,$$

где $\pi : T^*G \to G$ *— естественная проекция, а* $e^{t\vec{H}}$ *есть поток векторного поля* $\vec{H}$.

Определение 3. *Симметрией экспоненциального отображения называется пара диффеоморфизмов* $s : \mathcal{W} \times \mathbb{R}_+ \to \mathcal{W} \times \mathbb{R}_+$, $S : G \to G$, *таких, что* $\mathrm{Exp} \circ s = S \circ \mathrm{Exp}$, *где* $\mathcal{W} \subset \mathfrak{g}^*$ *есть открытое плотное подмножество.*

2. План исследования экстремальных траекторий на оптимальность

Приведем схему исследования экстремальных траекторий с помощью симметрий экспоненциального отображения.

1. Параметризация экстремальных траекторий.

2. Описание симметрий сопряженной подсистемы принципа максимума Понтрягина.

3. Продолжение этих симметрий до симметрий экспоненциального отображения.

4. Описание точек Максвелла, соответствующих симметриям. Поиск первого времени Максвелла как функции $t_{\max} : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

5. Поиск первого сопряженного времени $t_{\mathrm{conj}} : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, т.е. такого времени, что точки $(p, t_{\mathrm{conj}}(p))$, $p \in \mathfrak{g}^*$ являются критическими точками отображения Exp.

6. Доказательство неравенства $t_{\max}(p) \leqslant t_{\mathrm{conj}}(p))$ для почти всех $p \in \mathfrak{g}^*$.

7. Доказательство того, что отображение

$$\mathrm{Exp} : \{(p,t) \in \mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}_+ \mid t < t_{\max}(p)\} \to (G \setminus \{\mathrm{id}\}) \setminus \overline{\mathcal{M}}$$

является диффеоморфизмом, где $\overline{\mathcal{M}}$ — замыкание множества точек Максвелла.

В этом случае найденное первое время Максвелла в действительности оказывается временем разреза (временем потери оптимальности).

Следует отметить, что выполнение перечисленных пунктов, вообще говоря, не гарантировано. В частности, причины потери оптимальности эктремальных траекторий могут не ограничиваться симметриями сопряженной подсистемы. Например, в задаче Эйлера об эластиках возникает компонента множества разреза, не являющаяся стратом Максвелла для симметрий сопряженной подсистемы [5].

Кроме того, отдельным вопросом является существование продолжения симметрий сопряженной подсистемы до симметрий экстремальных траекторий. В следующем разделе приводятся достаточные условия существования такого продолжения.

3. Условия продолжаемости симметрий сопряженной подсистемы

Обозначим $\vec{H}_{\text{vect}} \in \text{Vect}(\mathfrak{g}^*)$ вертикальную часть гамильтонова векторного поля $\vec{H} \in \text{Vect}(T^*G)$. (Т.е. $\vec{H}_{\text{vect}}$ задает сопряженную подсистему.) Т.к. гамильтониан H левоинвариантен, то будем считать $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$.

Теорема 1. *Пусть G — связная группа Ли такая, что стабилизатор общего положения коприсоединенного представления связен. Пусть оператор $\sigma^* : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ сохраняет левоинвариантный гамильтониан H и выполнено одно из двух условий:*
(1) $\sigma^*(\vec{H}_{\text{vect}}) = \vec{H}_{\text{vect}}$ *и σ есть автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$;*
(2) $\sigma^*(\vec{H}_{\text{vect}}) = -\vec{H}_{\text{vect}}$ *и σ есть антиавтоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*
Тогда пара диффеоморфизмов (s, S^{-1}) является симметрией экспоненциального отображения, где

$$s(p,t) = \begin{cases} (\sigma^* p, t), & \text{в случае } (1), \\ (\sigma^* e^{t\vec{H}_{\text{vect}}} p, t), & \text{в случае } (2), \end{cases}$$

и $S : G \to G$ есть (анти)автоморфизм группы Ли G такой, что $dS = \sigma$.

Преобразование σ^* называется симметрией вертикальной части гамильтонова векторного поля, а пара диффеоморфизмов (s, S^{-1}) ее продолжением до симметрии экспоненциального отображения (или симметрией экстремальных траекторий).

Условие о связности стабилизатора общего положения коприсоединенного представления существенно только в случае симметрии типа (2).

Заметим, что в приложениях ключевую роль для построения множеств Максвелла, как правило, играют симметрии типа (2). При этом кривая $\{\text{Exp} \circ s(p,\tau) \mid \tau \in \mathbb{R}_+\}$ не является экстремальной траекторией. Экстремальной траекторией, симметричной траектории $\{\text{Exp}(p,\tau) \mid \tau \in [0,t]\}$, является кривая $\{\text{Exp} \circ (\sigma^* e^{t\vec{H}_{\text{vect}}} p, \tau) \mid \tau \in [0,t]\}$.

Ясно, что точки Максвелла, соответствующие симметрии σ^*, лежат среди множества неподвижных точек G^S. Если $F_{\sigma^*} : G \to \mathbb{R}^k$ — функция, задающая уравнения G^S, то время Максвелла, соответствующее симметрии σ^*, следует искать как неявную функцию $F_{\sigma^*}(\text{Exp}(p, t_{\max}^{\sigma^*}(p))) = 0$.

Следствие 1. *Пусть группа G компактна. Рассмотрим на группе G (биинвариантную) риманову метрику, определяемую формой Киллинга. Тогда в условиях теоремы 1, если экстремальная траектория левоинвариантной задачи оптимального управления пересекает геодезическую метрики Киллинга, то симметричная экстремальная траектория пересекает симметричную геодезическую метрики*

Киллинга в тот же момент времени и с тем же значением функционала качества.

4. Заключение

Для левоинвариантных задач оптимального управления на группах Ли представлены достаточные условия продолжаемости симметрий сопряженной подсистемы принципа максимума Понтрягина до симметрий экстремальных траекторий. Эти условия позволяют находить точки Максвелла, которые играют ключевую роль в исследовании экстремальных траекторий на оптимальность.

Работа выполнена в Институте программных систем имени А. К. Айламазяна РАН при поддержке гранта 17-11-01387 Российского научного фонда.

Список литературы

1. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
2. Montgomery R. A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 91. Providence, RI: American Mathematical Society, 2002.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961.
4. Сачков Ю.Л. Множество Максвелла в обобщенной задаче Дидоны // Математический сборник. 2006. Т. 197, № 4. С. 123-150.
5. Ардентов А.А. Кратные решения в задаче Эйлера об эластиках // Автоматика и телемеханика. 2018. № 7. С. 22-40.