

# НИЛЬПОТЕНТНАЯ СУБРИМАНОВА ЗАДАЧА С ВЕКТОРОМ РОСТА (2,3,5,8)

**Е.Ф. Сачкова**

*Институт программных систем им. А.К. Айламазяна РАН*

Россия, 152021, Ярославская область, Переславский район, с. Вельково, ул. Петра Первого, д. 4

«а»

E-mail: [efsachkova@mail.ru](mailto:efsachkova@mail.ru)

**Ключевые слова:** оптимальное управление, геометрическая теория управления, субриманова геометрия.

**Аннотация:** Рассматривается нильпотентная субриманова задача с вектором роста (2,3,5,8). Исследуются аномальные траектории. Описана структура множества аномальных траекторий. Исследована строгая аномальность и оптимальность этих траекторий.

## 1. Введение

### 1.1. Постановка задачи оптимального управления

Нильпотентная субриманова задача с вектором роста (2, 3, 5, 8) ставится как задача оптимального управления

$$(1) \quad \dot{x} = u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x), \quad x = (x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{R}^8, \quad u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2,$$

$$(2) \quad x(0) = 0, \quad x(T) = x^1,$$

$$(3) \quad l = \int_0^T \sqrt{(u_1^2 + u_2^2)} dt \rightarrow \min \Leftrightarrow J = \frac{1}{2} \int_0^T (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min,$$

$$(4) \quad X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{x_2}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_5} - \frac{x_1 x_2^2}{4} \frac{\partial}{\partial x_7} - \frac{x_2^3}{6} \frac{\partial}{\partial x_8},$$

$$(5) \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{x_1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{x_1^3}{6} \frac{\partial}{\partial x_6} + \frac{x_1^2 x_2}{4} \frac{\partial}{\partial x_7},$$

$$(6) \quad u(\cdot) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R}^2), \quad x(\cdot) \in \text{Lip}([0, T], \mathbb{R}^8).$$

Цель данной работы — исследование аномальных экстремальных траекторий в задаче (1)–(6). Это важно по следующим причинам:

- Задача (1)–(6) есть простейшая субриманова задача глубины 4,
- Нормальный геодезический поток этой задачи неинтегрируем по Лиувиллю [1].

## 1.2. Принцип максимума Понтрягина

Рассматривается кокасательное расслоение пространства состояний

$$T^*\mathbb{R}^8 = \{(x, \psi) \mid x \in \mathbb{R}^8, \psi \in T_x^*\mathbb{R}^8\},$$

его элементы  $\lambda = (x, \psi) \in T^*\mathbb{R}^8$ . Функция Понтрягина имеет вид

$$h_u^\nu(\lambda) = \langle \psi, u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x) \rangle + \frac{\nu}{2} (u_1^2 + u_2^2), \quad \lambda \in T^*\mathbb{R}^8, \quad u \in \mathbb{R}^2, \quad \nu \in \mathbb{R}.$$

Принцип максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи формулируется следующим образом (см. [2, 3]).

**Теорема 1.** *Если управление  $u(t)$  и соответствующая траектория  $x(t)$  оптимальны, то существуют липшицева кривая  $\lambda(t) = (x(t), \psi(t)) \in T^*\mathbb{R}^8$  и число  $\nu \in \{-1, 0\}$ , для которых следующие условия выполняются для п.в.  $t \in [0, T]$ :*

$$(7) \quad \dot{\lambda}(t) = \vec{h}_{u(t)}^\nu(\lambda(t)),$$

$$(8) \quad h_{u(t)}^\nu(\lambda(t)) = \max_{v \in \mathbb{R}^2} h_v^\nu(\lambda(t)),$$

$$(9) \quad (\nu, \lambda(t)) \neq (0, 0).$$

С помощью скобок Ли строится базис в нильпотентной алгебре Ли, порожденный полями (4), (5):  $X_1, \dots, X_8$ . Вводятся сопряженные переменные  $h_i(\lambda) = \langle \psi, X_i(x) \rangle$ ,  $i = 1, \dots, 8$ ,  $\lambda = (x, \psi) \in T^*\mathbb{R}^8$ . Исследуется гамильтонова система принципа максимума Понтрягина (7) для задачи (1)–(6):

$$(10) \quad \begin{aligned} \dot{h}_1 &= -h_3 u_2, \\ \dot{h}_2 &= h_3 u_1, \\ \dot{h}_3 &= h_4 u_1 + h_5 u_2, \\ \dot{h}_4 &= h_6 u_1 + h_7 u_2, \\ \dot{h}_5 &= h_7 u_1 + h_8 u_2, \\ \dot{h}_6 &= \dot{h}_7 = \dot{h}_8 = 0, \\ \dot{x} &= u_1 X_1(x) + u_2 X_2(x). \end{aligned}$$

Рассматриваются ненулевые управления  $u_1^2(t) + u_2^2(t) \neq 0$ .

## 2. Невырожденные аномальные траектории

### 2.1. Аномальная гамильтонова система ПМП

Рассматривается аномальный случай  $\nu = 0$ .

Вырожденный случай для аномальной гамильтоновой системы (10) заключается в том, что

$$\psi \in (\text{span}(X_1, \dots, X_5))^\perp, \quad X_3 = [X_1, X_2], \quad X_4 = [X_1, X_3], \quad X_5 = [X_2, X_3].$$

Этот случай был исследован в работе [4].

В докладе рассматривается невырожденный случай аномальной гамильтоновой системы ПМП для левоинвариантной задачи (1)–(6). Задача Коши для гамильтоновой системы (10) при условии максимума (8) в невырожденном аномальном случае и при начальном условии  $\lambda(0) = (x(0), \psi(0)) = \lambda^0 = (0, \psi^0)$  принимает вид:

$$(11) \quad \begin{aligned} h_1 &= h_2 = h_3 = 0, \\ h_4^2 + h_5^2 &\neq 0, \\ u_1(t) &= -\alpha(t)h_5(t), \\ u_2(t) &= \alpha(t)h_4(t), \\ \begin{pmatrix} \dot{h}_4 \\ \dot{h}_5 \end{pmatrix} &= \alpha(t) \begin{pmatrix} h_7 & -h_6 \\ h_8 & -h_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_4 \\ h_5 \end{pmatrix}, \\ \dot{h}_6 &= \dot{h}_7 = \dot{h}_8 = 0, \\ \dot{x} &= -\alpha(t)h_5(t)X_1(x_1(t), x_2(t)) + \alpha(t)h_4(t)X_2(x_1(t), x_2(t)), \\ \lambda(0) &= (0, \psi^0), \end{aligned}$$

где  $\alpha(t) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R})$ ,  $\alpha(t) \neq 0$  для п.в.  $t \in [0, T]$ , произвольна.

Невырожденный аномальный сопряженный вектор удовлетворяет условию

$$\psi \in (\text{span}(X_1, X_2, X_3))^\perp.$$

## 2.2. Невырожденные аномальные экстремальные пары

Невырожденные сопряженные векторы имеют вид

$$\psi(0) = \psi^0 = (0, 0, 0, h_4^0, h_5^0, h_6, h_7, h_8), \quad (h_4^0)^2 + (h_5^0)^2 \neq 0.$$

Экстремальные пары суть  $\lambda(t) = (x(t), \psi(t))$ .

На первом этапе исследования задачи Коши (11) рассматривается система при  $\alpha(t) \equiv 1$ . Тогда для любого  $\lambda^0 = (0, \psi^0) \in T^*\mathbb{R}^8$  существует каноническая невырожденная аномальная экстремальная пара:

$$(u^c(t, \psi^0), \lambda^c(t, \lambda^0)), \quad \begin{pmatrix} u_2^c(t, \psi^0) \\ -u_1^c(t, \psi^0) \end{pmatrix} = e^{Ct} \begin{pmatrix} h_4^0 \\ h_5^0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} h_7 & -h_6 \\ h_8 & -h_7 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T].$$

На втором этапе исследования задачи Коши (11) рассматривается система с произвольной функцией  $\alpha(t) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R})$ ,  $\alpha(t) \neq 0$  для п.в.  $t \in [0, T]$ . Тогда для любого  $\lambda^0 = (0, \psi^0) \in T^*\mathbb{R}^8$  существует невырожденная аномальная экстремальная пара:

$$(\tilde{u}(t), \tilde{\lambda}(t)) = (\alpha(t)u^c(s(t), \psi^0), \lambda^c(s(t), \lambda^0)),$$

где  $s(t) \in \text{Lip}([0, T], [0, S])$ ,  $s'(t) = \alpha(t)$  для п.в.  $t \in [0, T]$ .

Управления  $u(t, \psi^0)$  и соответствующие траектории  $x(t, \psi^0)$  были названы:  $\Delta > 0$  эллиптическими;  $\Delta < 0$  гиперболическими;  $\Delta = 0$  параболическими.

## 3. Структура аномальных траекторий

Доказано, что множество аномальных траекторий находится в естественном взаимно однозначном соответствии со множеством кривых первого и второго порядка на плоскости.

**Предложение 1.** *Анормальные траектории проецируются на плоскость  $x_1x_2$  в кривые первого и второго порядка: в прямые, эллипсы, гиперболы или параболы.*

*Обратно, для любой такой кривой на плоскости  $x_1x_2$ , выходящей из начала координат, найдется единственная анормальная траектория, проецирующаяся в эту кривую.*

## 4. Строгая и нестрогая анормальность экстремальных траекторий

Невырожденные анормальные экстремальные траектории исследуются на строгую анормальность и оптимальность.

Анормальная экстремальная траектория  $x(t)$  называется *нестрого анормальной*, если она является проекцией некоторой нормальной экстремали  $(\psi(t), x(t))$ ; в противном случае она называется *строго анормальной*.

Доказан критерий строгой анормальности.

**Теорема 2.** *Пусть  $x^c(t)$ ,  $t \in [0, T]$ , — невырожденная каноническая анормальная экстремальная траектория. Ее натуральная перепараметризация  $\tilde{x}(s) = x^c(t(s))$  строго анормальна тогда и только тогда, когда не существует постоянного действительного вектора  $\bar{c} \in \mathbb{R}^6$  такого, что на всем отрезке  $[0, T]$  выполнялось бы тождество:*

$$(12) \quad k(t) + P(t; \bar{c}) \equiv 0,$$

$$(13) \quad k(t) = \frac{\ddot{x}_1^c \dot{x}_2^c - \dot{x}_1^c \ddot{x}_2^c}{((\dot{x}_1^c)^2 + (\dot{x}_2^c)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$(14) \quad P(t; \bar{c}) = c_0 + c_1 x_1^c(t) + c_2 x_2^c(t) + c_3 (x_1^c(t))^2 + c_4 x_1^c(t) x_2^c(t) + c_5 (x_2^c(t))^2.$$

**Предложение 2.** *Пусть  $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$  есть произвольный эллипс (не окружность), гипербола или парабола. Тогда кривизна  $k(t) \not\equiv P(x_1(t), x_2(t))$ , где  $P(x_1, x_2)$  — полином.*

**Теорема 3.** *Равномерно пробегаемые невырожденные анормальные экстремальные траектории в (2, 3, 5, 8)-задаче*

1. *эллиптического (не кругового), гиперболического (не линейного) и параболического (не линейного) типов — строго анормальны;*
2. *кругового, гиперболического линейного и параболического линейного типов — нестрогово анормальны.*

*Все неравномерно пробегаемые невырожденные анормальные экстремальные траектории в (2, 3, 5, 8)-задаче — строго анормальны.*

## 5. Оптимальность

Моноotonно пробегаемая анормальная траектория есть перепараметризованная неубывающей липшицевой функцией равномерно пробегаемая анормальная траектория, см. [4].

**Теорема 4.** *Монотонно пробегаемая круговая аномальная экстремальная траектория  $x(t) \in \mathbb{R}^8$  глобально оптимальна вплоть до первого витка спирали, являющейся ее проекцией на трехмерное подпространство  $\mathbb{R}_{x_1x_2x_3}$ .*

**Теорема 5.** *Круговые оптимальные траектории  $x(t) \in \mathbb{R}^8$ ,  $x(0) = 0$ , заполняют невырожденное гладкое трехмерное многообразие  $G^\pm \subset \mathbb{R}^8$ , каждая из двух симметричных компонент которого является графиком некоторой гладкой вектор-функции:*

$$\vec{F}^\pm(x_1, x_2, x_3) = (x_4(x_1, x_2, \pm|x_3|), \dots, x_8(x_1, x_2, \pm|x_3|)), \\ x_1^2 + x_2^2 \neq 0, x_3 \neq 0.$$

**Теорема 6.** *Монотонно пробегаемые гиперболические линейные и параболические линейные аномальные экстремальные траектории являются оптимальными до бесконечности.*

Известно, см. [4], что такие траектории заполняют вырожденную аномальную поверхность, являющуюся двумерным гладким многообразием  $G_0 \in \mathbb{R}^8$ . Доказано, что замыкание трехмерного невырожденного гладкого многообразия  $G^\pm \subset \mathbb{R}^8$  содержит двумерную вырожденную аномальную поверхность  $G_0 \subset \mathbb{R}^8$ .

Доказано, что коранг траекторий, проецирующихся на радиальные лучи в плоскости  $x_1x_2$ , не меньше пяти.

**Теорема 7.** 1. *Монотонно пробегаемые вырожденные аномальные траектории ( $\psi \in (\text{span}(X_1, \dots, X_5))^\perp$ ) оптимальны, см. [4].*

2. *Короткие дуги монотонно пробегаемых невырожденных аномальных траекторий ( $\psi \in (\text{span}(X_1, X_2, X_3))^\perp$ ) оптимальны.*

**Следствие 1.** *Монотонно пробегаемые аномальные траектории являются субримановыми геодезическими.*

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01387) в Институте программных систем им. А.К. Айламазяна Российской академии наук.

## Список литературы

1. Локуциевский Л.В., Сачков Ю.Л. Об интегрируемости по Лиувиллю субримановых задач на группах Карно глубины 4 и больше // Матем. сб. 2018. Т. 209, № 5ю С 74–119.
2. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961.
4. Сачков Ю.Л., Сачкова Е.Ф. Вырожденные аномальные траектории в субримановой задаче с вектором роста (2, 3, 5, 8) // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 3. С. 362-374.