УДК 519.71

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Д.В. Туницкий
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: dtunitsky@yahoo.com

Аннотация: Работа посвящена обратной задаче вариационного исчисления применительно к одному классу квазилинейных гиперболических и эллиптических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.

1. Постановка задачи

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных

$$h^2(z_t)z_{tt} + \varepsilon g^2(z_x)z_{xx} + h(z_t)f_1(t) - \varepsilon g(z_x)f_2(x) = 0, \tag{1.1}$$

где $\varepsilon = -1$ или $\varepsilon = 1$. Это квазилинейное уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными t и x, неизвестной функцией

$$z = z(t,x) \tag{1.2}$$

и коэффициентами $h(p)$, $g(q)$, $f_2(x)$ и $f_1(t)$, которые заданы функциями

$$h\colon (\alpha_4, \beta_4) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g\colon (\alpha_3, \beta_3) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_2\colon (\alpha_2, \beta_2) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_1\colon (\alpha_1, \beta_1) \longrightarrow \mathbb{R},$$

среди которых первые два положительны: $h(p) > 0$, $g(q) > 0$. Здесь α_k и β_k – вещественные постоянные: $-\infty \le \alpha_k < \beta_k \le +\infty$ для $k = 1,2,3,4$. Поскольку коэффициенты h и g положительны, то уравнение (1.1) гиперболично при $\varepsilon = -1$ и эллиптично при $\varepsilon = 1$.

Как известно, для того чтобы функция z (1.2) являлась решением вариационной задачи

$$\iint \mathcal{L}\big(t, x, z_t(t,x), z_x(t,x), z(t,x)\big) dtdx \longrightarrow min$$

с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, x, z_t, z_x, z), \tag{1.3}$$

необходимо, чтобы она удовлетворяла уравнению Эйлера–Лагранжа

$$\mathcal{L}_z - \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{z_t} - \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}_{z_x} = 0. \tag{1.4}$$

У обратных задач вариационного исчисления достаточно продолжительная история, которая восходит к исследованиям Сонина [1], Гельмгольца [2] и Майера [3]. Имеется несколько возможных постановок обратных задач вариационного исчисления, которые, в частности, различаются классами искомых лагранжианов; см. [4]. В данной работе эта задача формулируется следующим образом. *Найти необходимые и достаточные условия пропорциональности левых частей уравнений (1.1) и (1.4)*, что означает существование таких функций $\mathcal{L}$ (1.3) и $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(t, x, p, q, z)$, заданных в области

$$M = (\alpha_1, \beta_1) \times (\alpha_2, \beta_2) \times (\alpha_3, \beta_3) \times (\alpha_4, \beta_4) \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^5, \tag{1.5}$$

для которых

$$h^2 z_{tt} + \varepsilon g^2 z_{xx} + g f_2 + h f_1 = \mathfrak{b}\left(\mathcal{L}_z - \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{z_t} - \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}_{z_x}\right) \tag{1.6}$$

при любых z_{tt}, z_{tx} и z_{xx}.

2. Внешние дифференциальные системы

Следуя Монжу, введем для первых производных функции z (1.2) обозначения

$$p = z_t(t, x), \qquad q = z_x(t, x). \tag{2.1}$$

Левая часть уравнения (1.1) может быть очевидным образом ассоциирована с внешней дифференциальной 2-формой

$$\omega_2 = h^2(p)dp \wedge dx + \varepsilon g^2(q)dt \wedge dq + \big(h(p)f_1(t) - \varepsilon g(q)f_2(x)\big)dt \wedge dx, \tag{2.2}$$

а равенства (2.1) и $q_t = p_x$ – с дифференциальными формами

$$\omega_0 = dz - pdt - qdx, \qquad \omega_1 = dt \wedge dp - dq \wedge dx; \tag{2.3}$$

см. [4, 5]. В частности, левой части уравнения Эйлера–Лагранжа (1.4)

$$\mathcal{L}_z - \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_p - \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{L}_q = \mathcal{L}_z - \mathcal{L}_{pt} - p\mathcal{L}_{pz} - \mathcal{L}_{qx} - q\mathcal{L}_{qz} - \mathcal{L}_{pp}z_{tt} - 2\mathcal{L}_{pq}z_{tx} - \mathcal{L}_{qq}z_{xx}$$

соответствует дифференциальная 2-форма

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}_2 = -\mathcal{L}_{pp}dp \wedge dx - \mathcal{L}_{pq}(dt \wedge dp + dq \wedge dx) - \mathcal{L}_{qq}dt \wedge dq \\ +\big(\mathcal{L}_z - \mathcal{L}_{pt} - p\mathcal{L}_{pz} - \mathcal{L}_{qx} - q\mathcal{L}_{qz}\big)dt \wedge dx.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Напомним, что *классическим решением* уравнения (1.1) называется такая функция z (1.2), которая при подстановке в левую часть уравнения (1.1) обращает его в верное тождество. Пусть отображение

$$\sigma: S \longrightarrow M \tag{2.5}$$

где M – область (1.5), является графиком классического решения z уравнения (1.1), который задан выражениями (1.2) и (2.1). По определению обратного образа σ^* дифференциальной формы

$$\begin{gathered}\sigma^*\omega_2 = \big(h^2(p)p_t + \varepsilon g^2(q)q_x + h(p)f_1(t) - \varepsilon g(q)f_2(x)\big)dt \wedge dx, \\ \sigma^*\omega_1 = (p_x - q_t)dt \wedge dx, \qquad \sigma^*\omega_0 = (z_t - p)dt + (z_x - q)dx.\end{gathered}$$

Ясно, что функция z (1.2) тогда и только тогда является классическим решением уравнения (1.1), когда ее график σ (2.5) удовлетворяет внешним дифференциальным уравнениям

$$\sigma^*\omega_0 = 0, \qquad \sigma^*\omega_1 = 0, \qquad \sigma^*\omega_2 = 0. \tag{2.6}$$

Погружение (2.5) называется *многозначным решением* уравнения (1.1), если оно удовлетворяет системе внешних дифференциальных уравнений (2.6); см. [4-6].

3. Характеристические формы

Рассмотрим линейные дифференциальные формы

$$\begin{gathered}\omega_{j,1} = h(p)dp - (-1)^j\sqrt{-\varepsilon}g(q)dq + f_1(t)dt + (-1)^j\sqrt{-\varepsilon}f_2(x)dx,\\ \omega_{j,2} = h(p)dx - (-1)^j\sqrt{-\varepsilon}g(q)dt,\end{gathered} \tag{3.1}$$

определенные в области M (1.5) для $j = 1,2$; здесь $\sqrt{-\varepsilon} = 1$ при $\varepsilon = -1$, и $\sqrt{-\varepsilon} = i$ при $\varepsilon = 1$. Эти формы называются *характеристическими*. Поскольку

$$\begin{gathered}\omega_{j,1} \wedge \omega_{j,2} = h^2(p)dp \wedge dx + \varepsilon g^2(q)dt \wedge dq + \big(h(p)f_1(t) - \varepsilon g(q)f_2(x)\big)dt \wedge dx\\ +(-1)^j\sqrt{-\varepsilon}h(p)g(q)(dt \wedge dp - dq \wedge dx),\end{gathered}$$

то справедливо следующее утверждение, объясняющее роль характеристических форм.

ЛЕММА. *(a) Формы ω_2 (2.2), ω_1 (2.3) и $\omega_{j,1}$, $\omega_{j,2}$ (3.1) удовлетворяют равенствам*

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\big(\omega_{1,1} \wedge \omega_{1,2} + \omega_{2,1} \wedge \omega_{2,2}\big), \qquad \omega_1 = \frac{-1}{2\sqrt{-\varepsilon}h(p)g(q)}\big(\omega_{1,1} \wedge \omega_{1,2} - \omega_{2,1} \wedge \omega_{2,2}\big).$$

(b) Погружение (2.5) тогда и только тогда удовлетворяет системе внешних дифференциальных уравнений (2.6), когда

$$\sigma^*\omega_0 = 0, \qquad \sigma^*\big(\omega_{1,1} \wedge \omega_{1,2}\big) = 0, \qquad \sigma^*\big(\omega_{2,1} \wedge \omega_{2,2}\big) = 0.$$

Из этой леммы вытекает следующее утверждение; см. [7].

СЛЕДСТВИЕ. *Левая часть уравнения (1.1) тогда и только тогда пропорциональна левой части уравнения Эйлера–Лагранжа (1.4), т.е. выполняется равенство (1.6), когда найдется такая дифференциальная 2-форма $\widetilde{\omega}_2$ вида (2.4), что для нее и характеристических форм (3.1) при $j,k = 1,2$ выполняются равенства*

$$\widetilde{\omega}_2 \wedge \omega_{1,k} \wedge \omega_{2,j} = 0. \tag{3.2}$$

4. Основной результат

Прямые вычисления показывают, что

$$\begin{gathered}\widetilde{\omega}_2 \wedge \omega_{1,1} \wedge \omega_{2,1} = \widetilde{\omega}_2 \wedge \omega_{1,1} \wedge \big(\omega_{1,1} - 2\sqrt{-\varepsilon}gdq + 2\sqrt{-\varepsilon}f_2(x)dx\big) =\\ -\mathcal{L}_{pp}dp \wedge dx \wedge f_1dt \wedge \big(-2\sqrt{-\varepsilon}gdq\big) - \mathcal{L}_{qq}dt \wedge dq \wedge hdp \wedge \big(2\sqrt{-\varepsilon}f_2(x)dx\big)\\ + \big(\mathcal{L}_z - \mathcal{L}_{pt} - p\mathcal{L}_{pz} - \mathcal{L}_{qx} - q\mathcal{L}_{qz}\big)dt \wedge dx \wedge hdp \wedge \big(-2\sqrt{-\varepsilon}gdq\big) =\\ -2\sqrt{-\varepsilon}\Big(gf_1\mathcal{L}_{pp} - hf_2\mathcal{L}_{qq} + hg\big(\mathcal{L}_z - \mathcal{L}_{pt} - p\mathcal{L}_{pz} - \mathcal{L}_{qx} - q\mathcal{L}_{qz}\big)\Big)\, dt \wedge dx \wedge dp \wedge dq,\\ \widetilde{\omega}_2 \wedge \omega_{1,1} \wedge \omega_{2,2} = \big(h^2\mathcal{L}_{qq} + 2\sqrt{-\varepsilon}gh\mathcal{L}_{pq} - \varepsilon g^2\mathcal{L}_{pp}\big)dt \wedge dx \wedge dp \wedge dq,\\ \widetilde{\omega}_2 \wedge \omega_{1,2} \wedge \omega_{2,1} = \big(-h^2\mathcal{L}_{qq} + 2\sqrt{-\varepsilon}gh\mathcal{L}_{pq} + \varepsilon g^2\mathcal{L}_{pp}\big)dt \wedge dx \wedge dp \wedge dq,\\ \widetilde{\omega}_2 \wedge \omega_{1,2} \wedge \omega_{2,2} = 0.\end{gathered}$$

Следовательно, условия следствия (3.2) эквивалентны разрешимости системы

$$\begin{gathered}gf_1\mathcal{L}_{pp} - hf_2\mathcal{L}_{qq} + hg\big(\mathcal{L}_z - \mathcal{L}_{pt} - p\mathcal{L}_{pz} - \mathcal{L}_{qx} - q\mathcal{L}_{qz}\big) = 0,\\ h^2\mathcal{L}_{qq} + 2\sqrt{-\varepsilon}gh\mathcal{L}_{pq} - \varepsilon g^2\mathcal{L}_{pp} = 0,\\ -h^2\mathcal{L}_{qq} + 2\sqrt{-\varepsilon}gh\mathcal{L}_{pq} + \varepsilon g^2\mathcal{L}_{pp} = 0\end{gathered} \tag{4.1}$$

относительно неизвестной функции $\mathcal{L}$ (1.3). Имеет место

ТЕОРЕМА. *Левая часть уравнения (1.1) тогда и только тогда пропорциональна левой части уравнения Эйлера–Лагранжа (1.4), т.е. выполняется равенство (1.6), когда*

$$\left(\frac{1}{h(p)}\right)'' f_1(t) - \varepsilon\left(\frac{1}{g(q)}\right)'' f_2(x) = 0 \tag{4.2}$$

для всех $p \in (\alpha_4, \beta_4)$, $q \in (\alpha_3, \beta_3)$, $x \in (\alpha_2, \beta_2)$ и $t \in (\alpha_1, \beta_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из двух последних уравнений (4.1) вытекает существование таких трех функций $\mathcal{L}_1(t,x,z,p)$, $\mathcal{L}_2(t,x,z,q)$ и $L(t,x,z)$, что

$$\mathcal{L}(t,x,z,p,q) = \mathcal{L}_1(t,x,z,p) + \mathcal{L}_2(t,x,z,q),$$
$$\mathcal{L}_{2qq}(t,x,z,q) = \varepsilon L(t,x,z) g^2(q), \qquad \mathcal{L}_{1pp}(t,x,z,p) = L(t,x,z) h^2(p).$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение (4.1), получаем

$$(hf_1 - \varepsilon g f_2)L + \mathcal{L}_{1z} + \mathcal{L}_{2z} - \mathcal{L}_{1tp} - p\mathcal{L}_{1zp} - \mathcal{L}_{2xq} - q\mathcal{L}_{2zq} = 0.$$

Дифференцируя полученное соотношение по p и q, находим необходимые и достаточные условия разрешимости уравнений (4.1)

$$-L_t h^2 - pL_z h^2 + h' f_1 L = 0, \qquad L_x g^2 + qL_z g^2 - \varepsilon g' f_2 L = 0.$$

Следовательно,

$$(\ln L)_z + \left(\frac{1}{h}\right)'' f_1 = 0, \qquad (\ln L)_z + \varepsilon \left(\frac{1}{g}\right)'' f_2 = 0,$$

откуда получается условие (4.2).

Список литературы

1. Сонин Н.Я. Об определении максимальных и минимальных свойств плоских кривых // Варшавские университетские известия. 1886. № 1-2. С. 1-68.
2. Helmholtz H. Über der physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung // J. Reine Angew. Math., 1887. Vol. 100. Z. 137-166.
3. Mayer A. Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentiales, Berich. Verh. Konig. Sach. Gesell. wissen // Leipzig, Math. Phys. 1896. Vol. 84. Z. 519-529.
4. Лычагин В.В. Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка // УМН. 1979. Т. 34, № 1. С. 137-165.
5. Kushner A., Lychagin V., Rubtsov V. Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia Math. Appl., 101, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
6. Виноградов А.М. Многозначные решения и принцип классификации нелинейных дифференциальных уравнений // ДАН СССР. 1973. Т. 210, № 1. С. 11-14.
7. Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: МГУ, 1962.