УДК 517.977

ЯЗЫК БЕСКОНЕЧНЫХ ДЖЕТОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

В.Н. Четвериков
Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э.Баумана
Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1
E-mail: chetverikov.vl@yandex.ru

Ключевые слова: системы вход-выход, динамическая обратная связь, декомпозиция систем с управлением, бесконечные джеты, преобразования Бэклунда.

Аннотация: В докладе на языке бесконечных джетов формулируются некоторые понятия теории управления. В частности, доказывается, что отображение вход–выход есть преобразование Бэклунда. Динамическая обратная связь системы — накрытие над данной системой. Плоская система — система, диффеоморфная пространству бесконечных джетов. Динамически линеаризуемая система — система, накрываемая пространством бесконечных джетов. Декомпозиция системы с управлением — накрытие из данной системы. Полученные формулировки предлагается использовать в дальнейшем при решении задач управления, связанных с этими понятиями.

1. Некоторые понятия теории управления

Рассмотрим гладкую регулярную систему с входом (u) и выходом (y):

(1) $$\dot{x} = f(t,x,u), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

(2) $$y = h(t,x), \qquad y \in \mathbb{R}^p.$$

Предположим зафиксированы начальные условия для переменных состояния x. Для каждой гладкой векторной функции $u(t)$ переменной времени t при подстановке ее в систему (1) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно переменных состояния. Пусть $x(t)$ — решение задачи Коши для этой системы с заданными начальными условиями на x. Вычисляя $y(t) = h(t,x(t))$, получаем отображение $u(t) \mapsto y(t)$, которое называют *отображением вход – выход.*

Динамической обратной связью системы (1) называют систему вида

(3) $$\dot{\xi} = a(t,x,\xi,v), \qquad u = b(t,x,\xi,v), \qquad \xi \in \mathbb{R}^d, \ v \in \mathbb{R}^m,$$

с состоянием ξ, входом (x,v) и выходом u. Область пространства с координатами t,x,ξ,v, где определены функции a и b, называют *областью определения*, а число d — *размерностью динамической обратной связи* (3).

Динамическую обратную связь (3) можно понимать как преобразование системы (1) в систему

(4) $$\dot{x} = f\big(t,x,b(t,x,\xi,v)\big), \qquad \dot{\xi} = a(t,x,\xi,v)$$

с состоянием $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{n+d}$ и управлением v. Второе равенство в (3) определяет отображение из множества решений системы (4) в множество решений системы (1).

Динамическую обратную связь (3) называют *регулярной*, если любое гладкое решение системы (1) может быть расширено до решения системы (4).

Говорят, что система (1) *динамически линеаризуема*, если существует такая регулярная динамическая обратная связь (3), что система (4) эквивалентна линейной управляемой системе.

Система (1) называется *плоской* в области $\mathcal{O}^{(l)}$ с координатами $t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}$, если на $\mathcal{O}^{(l)}$ определены такие функции

$$(5) \qquad y_1 = h_1(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}), \quad \dots, \quad y_r = h_r(t, x, u, \dot{u}, \dots, u^{(l)}),$$

что переменные x и u выражаются через t, функции (5) и их производные в силу системы (1) до какого–то конечного порядка, а любой конечный набор функций (5), их производных в силу системы (1) и функции t функционально независим. При этом набор функций (5) называется *плоским* (или *линеаризующим*) *выходом* системы (1).

Декомпозицией системы с управлением называют преобразование системы в систему вида

$$(6) \qquad \dot{z} = g_1(t, z, v), \qquad z \in \mathbb{R}^{n_1}, \quad v \in \mathbb{R}^{m_1},$$
$$(7) \qquad \dot{\zeta} = g_2(t, \zeta, z, v, \dot{v}, \dots, v^{(l)}, \xi), \qquad \zeta \in \mathbb{R}^{n_2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^{m_2},$$

с состоянием (z, ζ) и управлением (v, ξ).

Декомпозиция позволяет решать систему в два этапа: сначала находить решение $\big(z(t), v(t)\big)$ системы (6), а затем решение $\big(\zeta(t), \xi(t)\big)$ системы

$$\dot{\zeta} = g_2(t, \zeta, z(t), v(t), \dot{v}(t), \dots, v^{(l)}(t), \xi).$$

Рассматриваемую нами декомпозицию мы называем *орбитальной*, потому что для преобразования системы в декомпозируемую форму мы используем орбитальную эквивалентность [1].

2. Язык бесконечных джетов

Более полное изложение геометрии систем дифференциальных уравнений можно найти в [2].

С системой (1) связывают бесконечномерное пространство $\mathbb{R}^\infty$ с топологией Тихонова и с координатами

$$(8) \qquad t, \; x_1, \; \dots, \; x_n, \; u_1^{(0)}, \; \dots, \; u_m^{(0)}, \; u_1^{(1)}, \; \dots, \; u_m^{(1)}, \; u_1^{(2)}, \; \dots,$$

где координаты $u_j^{(0)}$ соответствуют переменным u_j, а координаты $u_j^{(l)}$ — производным $d^l u_j / dt^l$, $l > 0$. Обозначим через $\mathcal{E}^\infty$ открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^\infty$ с координатами (8), в котором определена система (1) и лежат допустимые управления.

Каждое гладкое решение $s(t) = \big(x_*(t), u_*(t)\big)$ системы (1) и точка t_0, в окрестности которой это решение определено, задают точку из $\mathcal{E}^\infty$ с координатами

$$t = t_0, \quad x_i = x_{*,i}(t_0), \quad u_j^{(l)} = \frac{d^l u_{*,j}(t_0)}{dt^l}, \qquad i = \overline{1, n}, \; j = \overline{1, m}, \; l \geqslant 0.$$

Эта точка называется *бесконечным джетом* решения s в точке t_0, а множество бесконечных джетов решения s во всех точках t_0, в окрестности которых это решение определено, — *графиком в* $\mathcal{E}^\infty$ *решения* s. Любая точка множества $\mathcal{E}^\infty$ является бесконечным джетом некоторого решения (доказательство см. в [2]).

На множестве $\mathcal{E}^\infty$ вводятся обычные дифференциально–геометрические понятия: гладкие функции, векторные поля, дифференциальные формы и т. д. А именно, *гладкой функцией на* $\mathcal{E}^\infty$ называется бесконечно дифференцируемая функция, зависящая от конечного (но произвольного) набора переменных (8). Алгебра гладких функций на $\mathcal{E}^\infty$ обозначается через $\mathcal{F}(\mathcal{E})$.

По определению, любая *дифференциальная* k*–форма на* $\mathcal{E}^\infty$ зависит от конечного набора переменных (8). Любое дифференцирование алгебры $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ представляет собой линейную комбинацию (в общем случае бесконечную) частных производных по координатам (8) и называется *векторным полем на* $\mathcal{E}^\infty$. Векторное поле

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^{n} f_l(t,x,u)\frac{\partial}{\partial x_l} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{\infty} u_i^{(j+1)}\frac{\partial}{\partial u_i^{(j)}},$$

определенное в точках $\mathcal{E}^\infty$, называют *полной производной по* t *на* $\mathcal{E}^\infty$.

Производная Ли вдоль D функции $g \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$ совпадает с производной функции g в силу системы (1). Векторное поле D порождает распределение $\mathcal{C}$ на $\mathcal{E}^\infty$, которое называют *распределением Картана на* $\mathcal{E}^\infty$. Интегральные кривые распределения Картана совпадают с графиками решений системы (1). Поэтому в качестве *геометрической модели системы* (1) рассматривают пару $(\mathcal{E}^\infty, \mathcal{C})$, которую называют *диффеотопом* (или *бесконечным продолжением*) системы (1).

Множество всех векторных функций $z(t) = (z_1(t), \ldots, z_m(t))$ заданного размера (m) будем понимать как множество решений тривиальной (без уравнений) системы. Диффеотоп такой системы будем обозначать J^∞ и называть *пространством бесконечных джетов* функций $z(t)$.

Гладким отображением из диффеотопа $\mathcal{E}^\infty$ в диффеотоп $\mathcal{S}^\infty$ называют такое отображение

$$F : \mathcal{E}^\infty \longrightarrow \mathcal{S}^\infty, \tag{9}$$

для которого индуцированное отображение F^* отображает гладкие функции в гладкие, т.е. $F^*\big(\mathcal{F}(\mathcal{S})\big)\subset\mathcal{F}(\mathcal{E})$, где $F^*(g) = g \circ F$. Отображение (9) называется *диффеоморфизмом*, если оно гладкое, взаимнооднозначное, и обратное отображение также является гладким.

Диффеоморфизм (9) называется $\mathcal{C}$*–диффеоморфизмом* [2] (или *изоморфизмом Ли–Бэклунда*, или *орбитальной эквивалентностью* [1]), если

$$F_*(\mathcal{C}_\theta(\mathcal{E})) = \mathcal{C}_{F(\theta)}(\mathcal{S}), \qquad \forall \theta \in \mathcal{E}^\infty. \tag{10}$$

При этом $\mathcal{C}$*–диффеоморфными* называются системы, чьи диффеотопы связаны $\mathcal{C}$–диффеоморфизмом.

Так как интегральные кривые распределения Картана совпадают с графиками решений соответствующей системы, то из условия (10) следует, что любой $\mathcal{C}$–диффеоморфизм отображает графики решений одной системы в графики решений другой системы. Таким образом, $\mathcal{C}$–диффеоморфные системы — это эквивалентные системы.

Гладкое отображение (9) называется *накрытием*, если в каждой точке $\theta \in \mathcal{E}^\infty$:
(a) касательное отображение $F_{*,\theta}$ является эпиморфизмом векторных пространств;
(b) выполняется условие (10);

(c) размерность ядра $F_{*,\theta}$ постоянна.

Размерностью накрытия называется размерность ядра $F_{*,\theta}$. Если (9) — накрытие, а $\mathcal{E}^\infty$ и $\mathcal{S}^\infty$ — диффеотопы систем $\mathcal{E}$ и $\mathcal{S}$ соответственно, то говорят, что система $\mathcal{E}$ *накрывает* систему $\mathcal{S}$, или что F — *накрытие системы* $\mathcal{S}$ системой $\mathcal{E}$.

Преобразованием Бэклунда между уравнениями $\mathcal{E}$ и $\mathcal{S}$ называется [2] следующая диаграмма, в которой отображения τ и τ' являются накрытиями:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{\mathcal{E}}^\infty \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\tau'"] & \\ \mathcal{E}^\infty & & \mathcal{S}^\infty \end{tikzcd} .$$

Заметим, что преобразование Бэклунда между системами $\mathcal{E}$ и $\mathcal{S}$ переводит каждое решение системы $\mathcal{E}$ в набор решений системы $\mathcal{S}$. Этот набор определяется слоем накрытия τ.

3. Некоторые применения

Теорема 1. *[1] Система (1) плоская в окрестности точки $\theta \in \mathcal{E}^\infty$ тогда и только тогда, когда существует $\mathcal{C}$–диффеоморфизм F из окрестности этой точки в открытое подмножество пространства бесконечных джетов, сохраняющий независимую переменную: $F^*(t) = t$.*

Система с управлением называется *орбитально плоской* [1] в области $\mathcal{O}^{(l)}$, если существует $\mathcal{C}$–диффеоморфизм области $\mathcal{O}^{(l)}$ в открытое подмножество пространства бесконечных джетов.

Теорема 2. *[3] Динамическая обратная связь (3) системы (1) определяет конечномерное накрытие этой системы системой (4). А любое конечномерное накрытие системы (1) определяет ее динамическую обратную связь.*

Теорема 3. *[3] Регулярная система (1) динамически линеаризуема в окрестности точки θ ее диффеотопа тогда и только тогда, когда существует конечномерное накрытие из некоторого открытого подмножества пространства бесконечных джетов в окрестность точки θ.*

Рассмотрим конечномерное накрытие F из некоторой системы $\mathcal{E}$ на систему (6). Пусть $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_q)$ — координаты в слоях накрытия F в окрестности рассматриваемой точки. Тогда производные переменных ζ в силу системы $\mathcal{E}$ являются функциями от $t,\ \zeta,\ z,\ \dot{z}, \ldots,\ z^{(l)}$ для некоторого $l \geqslant 0$. Таким образом, в переменные $t,\ \zeta,\ z$ система $\mathcal{E}$ имеет вид

$$\dot{z} = g_1(t, z, v), \qquad \dot{\zeta} = b(t, \zeta, z,\ \dot{z}, \ldots,\ z^{(l)}). \tag{11}$$

Будем говорить, что система (6)-(7) является *орбитальной декомпозицией* системы (1), если диффеотопы этих двух систем связаны некоторым $\mathcal{C}$–диффеоморфизмом.

Теорема 4. *[4] Система $\mathcal{E}$ допускает орбитальную декомпозицию вида (11) тогда и только тогда, когда существует конечномерное накрытие из системы $\mathcal{E}$ на систему (6).*

Заметим, что выход y системы (1)-(2) может удовлетворять некоторой системе дифференциальных уравнений. Будем называть эту систему *системой на выходы.*

Теорема 5. *В окрестности регулярной точки системы (1)-(2) отображение вход – выход есть преобразование Бэклунда*

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E}^\infty \arrow[dl, "\tau_u"'] \arrow[dr, "\tau_y"] & \\ J^\infty & & \mathcal{Y}^\infty \end{tikzcd},$$

где $\mathcal{E}^\infty$ — диффеотоп системы (1), J^∞ — пространство бесконечных джетов входов u, $\mathcal{Y}^\infty$ — диффеотоп системы на выходы y, накрытие τ_u отображает точку $(t, x, u, u^{(1)}, \dots, u^{(k)}, \dots)$ в точку $(t, u, u^{(1)}, \dots, u^{(k)}, \dots)$, а накрытие τ_y определяется соотношением (2).

4. Заключение

В докладе сформулированы только некоторые приложения бесконечных джетов в теории управления. Среди других применений упомянем условия достижимости и управляемости [5], понятие дифференциальной размерности нелинейных систем с управлением [6], условия орбитальной декомпозируемости систем и методы решения задач терминального управления [4]. Результаты, полученные алгебраическими методами [7], также могут быть сформулированы на языке бесконечных джетов. Разница между этими двумя подходами заключается в том, что в алгебраической теории используются мероморфные функции, а в теории бесконечных джетов — гладкие функции, причем результаты формулируются в окрестности точек общего положения, т.е. там, где функции, на которые мы делим, не равны нулю.

Кроме того, язык бесконечных джетов удобен для обобщения результатов на случай систем с запаздыванием [8] и систем с распределенными параметрами (см. [2, гл. 6, §6]). Поэтому упомянутые понятия и факты могут быть обобщены на системы этих типов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (19-07-00817а).

Список литературы

1. Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. A Lie–Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1999. Vol. 44, No. 5. P. 922-937.
2. Симметрии и законы сохранения уравнений математической физики / А.В. Бочаров, А.М. Вербовецкий, А.М. Виноградов и др. М.: Факториал, 1997. 464 с.
3. Четвериков В.Н. Плоскостность динамически линеаризуемых систем // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1665-1674.
4. Белинская Ю.С., Четвериков В.Н. Симметрии, накрытия, декомпозиция систем и терминальное управление // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 11. С. 1477-1488.
5. Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Ollivier F., and Rouchon P. A remark on nonlinear accessibility conditions and infinite prolongations // Syst. Control Letters. 1997. Vol. 31, No. 2. P. 77-83.
6. Fliess M., Lévine J., Martin Ph., Rouchon P. Deux applications de la géométrie locale des diffiétés // Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. 1997. Vol. 66. P. 275-292.
7. Conte G., Moog C. H., Perdon A.M. Algebraic Methods for Nonlinear Control Systems. London: Springer, 2006.
8. Четвериков В.Н. Плоские управляемые системы с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41, № 12. С. 1667-1674.