УДК 517.5

ПРОЕКЦИОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ОПТИМИЗАЦИИ ОГРАНИЧЕННЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

В.Н. Козлов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29

E-mail: saiu@ftk.spbstu.ru

А.А. Ефремов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого

Россия, 195251, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29

E-mail: artem.efremov@spbstu.ru

Ключевые слова: интервально допустимые управления, математическое программирование, проекционные операторы, устойчивость, функциональный анализ.

Аннотация: Рассматриваются модели и методы синтеза ограниченных допустимых субоптимальных управлений однопараметрического типа на основе квазианалитических проекционно-операторных методов математического программирования.

1. Введение

Проекционные операторы адекватно описывают обратные связи как решения задач математического программирования [1–4]. Класс корректности и универсальности синтезируемых систем определяется совместностью обобщенных линейных ограничений-равенств задач оптимизации и ограничения-неравенства типа нормы, заданного шаром евклидова пространства, а также совместностью ограничений в целом.

2. Постановка и математическая формулировка задачи синтеза квазиоптимальных интервально допустимых управлений

Требуется вычислить устойчивые интервально допустимые и квазиоптимальные прогнозируемые управления для приближенной минимизации функционала в виде суммы нормы отклонений выходных координат от заданных программных значений и нормы управлений для линейного управляемого по Р. Калману разностного оператора объекта

$$x_{k+1} = Hx_k + F_u u_k \in R^{n_x},\ y_k = cx_k \in R^{n_y},\ u_k \in R^{n_y},\ x_{k_0} = x_0 \in D \tag{1}$$

При этом управления формируются на основе решения счетного семейства задач математического программирования вида: вычислить прогнозируемые векторы управлений [2]

$$\begin{gathered} u_{k*}(x_k) = \gamma T_U U_{k*}(x_k)\,,\ \ \gamma \in R^1,\ \ U_{k*}(x_k) = \arg\min\Big\{\phi = \|Z_{kp} - C_k\|_2^2\,, \\ Z_k = (Y_k, U_k)^T\ \Big|\ AZ_{kp} = b_k,\ \ \|Z_{kp}\|_2^2 \leqslant r^2\Big\} \in R^{n_x p}, \end{gathered} \tag{2}$$

на интервале $[k,\, k+p] \in N$ как «горизонте прогнозирования» для векторов выходов $Y_k \in R^{n_y p}$ и управлений с учетом ограничений на нормы обобщенного вектора прогнозов. При этом $D \in R^n$ - область притяжения системы, а векторы и матрицы заданы включениями

$$x_k \in R^{n_x},\ y_k \in R^{n_y},\ H \in R^{n_x \times n_x},\ F \in R^{n_x \times n_u},\ c \in R^{n_y \times n_x}.$$

Матрица T_U «фильтрует» вектор управления $u_{k*}(x_k)$ из решения $U_{k*}(x_k)$ задачи (2).

Заданные свойства системы программируются в математической форме путем расширения линейного многообразия ограничений в (2) вида $AZ_{kp} = b_k$. Квазианалитическая проекционно-операторная форма для векторов управлений $U_{k*}(x_k)$ обеспечивает качественный анализ реализуемых требований с помощью обобщенных линейных ограничений, включающих прогнозирующую модель на основе операторов (1) и (2).

В процессе синтеза необходимо исследовать ограничения по устойчивости на параметр обратной связи $\gamma \in R^1$, и качество управления замкнутой нелинейной системы с математическим программированием заданных свойств в ограничениях на координаты состояния и управления. При этом модель объекта управления (1) используется для вычисления прогнозов векторов Y_k в моменты времени $k \in N$ с учетом целевого вектора C_k, что позволяет вычислить квазиоптимальные допустимые значения векторов выходных координат $y_k \in R^{n_y}$ на интервале прогноза $[k,\, k+p]$. При этом векторы управлений U_{k*} минимизируют отклонения выходов объекта y_k относительно заданий на текущем интервале.

3. Синтез управлений на основе проекционных операторов

Для синтеза определяется структура линейного многообразия $AZ_{kp} = b_k$ для математического программирования многошаговой динамики и суммарного ограничения-неравенства на прогнозы векторов выхода и управлений в виде требования $\|Z_{kp}\|_2^2 \leqslant r^2$. Для совместности ограничений задачи (2) прогнозируемые управления и выходы должны принадлежать непустому пересечению линейного многообразия и шара. Пусть система (3) управляема по выходам, т. е. систему можно перевести из одного состояния в другое за конечное время ограниченным управлением. При этом прогнозы выходов и управлений на интервале $[k,\ k+p] \in N$ задаются обобщенным линейным многообразием с помощью модели типа (1) и «математически программированием» прогнозируемой динамики на основе «множества моделей» [2]

$$D_Z^0 = \left\{ Z_{kp} = (Y_k,\ U_k)^T \,\middle|\, A\,Z_{kp} = b_k, \quad A = \left[E_{p\,n_y}\ \ |-G\right] \in R^{pn_y \times (pn_y + pn_u)} \right\}, \tag{3}$$

где блочная матрица и вектор параметров имеют вид

$$G = \begin{bmatrix} cF & 0_{n_y \times n_u} & .. & 0_{n_y \times n_u} \\ cHF & cF & .. & 0_{n_y \times n_u} \\ .. & .. & .. & .. \\ cH^{p-1}F & cH^{p-2}F & .. & cF \end{bmatrix} \in R^{pn_y \times pn_u},$$

$$c\bar{H}x_k = c \begin{bmatrix} H \\ H^2 \\ .. \\ H^p \end{bmatrix} x_k = b_k.$$

Обобщенный вектор Z_{kp}, векторы выхода и управлений имеют вид

$$Z_{kp} = \left[Y_k, U_k\right]^T, \quad Y_k = \left[y_{k+1},\ ...,\ y_{k+j},\ \ ...\ ,\ y_{k+p}\right]^T,$$
$$U_k = \left[u_k, ...,\ u_{k+j-1},\ ...,\ u_{k+p-1}\right]^T.$$

Согласованные матричные параметры определены равенствами

$$T_U = \left[0_{p\,n_y \times pn_u}\,|E_{pn_u \times pn_u}\right],\ A = \left[E_{pn_y}\ \ |-G\right],\ \ rang\,A = pn_y.$$

Таким образом, если (H, F, c) управляемы по Р. Калману, то на основе (1) продолженные решения (1) из состояния x_k на интервал $[k+1,\ k+p]$ задают прогнозы выходов $y_{k+j}\left(x_k,\ u_{k+j-1}\right)$ как функции состояния x_k и управлений u_{k+j-1}, $j \in [0,\ p]$.

Множество (3) как «множеством моделей» задает линейное многообразие для прогнозирования координат и управлений на заданный интервал с помощью продолженных решений системы для выходов. Смешанные ограничения-неравенства на выходы и управления заданы множеством-параллелепипедом, аппроксимированным шаром

$$D_Z^1 = \left\{ Z_{kp} = \left(Y_k, U_k\right)^T \ \ |\ \|\,Z_{\,kp}\|_2^{\,2}\ \leqslant\ r^{\,2} \right\}. \tag{4}$$

Определение решения (3) обобщается для допустимых ограниченных продолженных решений.

Интервально допустимые управления $\bar{U}_k\left(\bar{\theta}_p,\ x_k\right)$ формируют ограниченные прогнозы выходов динамического объекта на заданном интервале, которые далее вычисляются на основе двух обобщенных «граничных экстремальных решений» задач. Регуляризованный оператор ИДУ для целевого функционала по выходу и управлению в функции состояний x_k равен [2]

$$\begin{gathered} \bar{U}_k\left(\bar{\theta}_p,\ x_k\right) = T_U\,P_A b_k\left(x_k\right) + \bar{\theta}_p T_U\,P^0 C\rho^{-1/2}\alpha^{1/2}\left(x_k\right), \\ \bar{\theta}_p = 1 - 2p_\theta\left(\theta\right) \in [-1,\quad 1],\ \ \theta \in R, \end{gathered} \tag{5}$$

где два оператора имеют вид $P_A = A^T\left(AA^T\right)^{-1},\ P^0 = E_{n_y} - P_A A$, кусочно-линейный оператор для $\forall\theta \in R$ равен $p_\theta\left(\theta\right) = 0,5\left(|\theta\,| - |\theta - 1| + 1\right) \in [0,\ 1]\,;\ \rho^{-1/2} = \|P^0 C\|_2^{-1/2} \in$

R, «функциональный» параметр $\alpha^{1/2}(x_k) = \left[r^2 - p_\alpha\left(\|Q_k\|_2^2\right)\right]^{1/2}$, $Q_k = P_A c\bar{H}x_k$, а проектор

$$p_\alpha\left(\|Q_k\|_2^2\right) = 0,5\left(\left|\,\|Q_k\|_2^2 - \varepsilon^2\right| - \left|\,\|Q_k\|_2^2 - (r-\varepsilon)^2\,\right| + \right.$$
$$\left. + \varepsilon^2 + (r-\varepsilon)^2\right) \in \left[\varepsilon^2,\, (r-\varepsilon)^2\right] \subset R,$$

является липшицевым: $\left|\alpha^{1/2}(c) - \alpha^{1/2}(d)\right| \leqslant L_\alpha\,|\alpha(c) - \alpha(d)|$, где $L_\alpha \in [0,1r^2;\ \ 0,9r^2]$.

Таким образом, разностный регуляризованный оператор квазиоптимальной системы с учетом (1) и оператора управления с обратной связью (2) определяется уравнениями [2]

$$x_{k+1} = Hx_k + \gamma F_u U_{k*}(x_k)\,,\ y_k = cx_k,\ \ x_{k_0} = x_0 \in D,$$
$$U_{k*}(x_k) = T_U \arg\min\left\{\phi = \|Z_{kp} - C\|_2^2,\quad Z = (Y_k, U_k)^T\,|AZ_{kp} = b_k,\right. \tag{6}$$
$$\left.\|Z_{kp}\|_2^2 \leqslant r^2\right\} = T_U\, P_A b_k(x_k) + \bar{\theta}_p T_U\, P^0 C\rho^{-1/2}\alpha_k^{1/2}(x_k)\,.$$

позволяет исследовать аналитическими и численными методами устойчивость систем квазиоптимального интервально допустимого управления типа (5).

4. Заключение

Математическая формализация свойств и заданных требований» реализуется явной формой операторно-оптимальных обратных связей с законами управления, обеспечивающими синтез систем на основе универсальных корректных математических формулировок задач синтеза. Сформулированы основы синтеза систем с заданными динамическими или статическими объектами управления с математически программируемыми свойствами.

Список литературы

1. Козлов В.Н. Негладкие системы, операторы оптимизации и устойчивость энергообъединений. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та. 2012. 183 с.
2. Козлов В.Н. Устойчивость динамических систем с операторами минимизации // Сборник трудов 5-й Четаевской конференции. Казань. Изд-во Казанского национ. иссл. ун-та (КАИ), 2012.
3. Козлов В.Н. Синтез управлений крупномасштабными объектами на основе операторов оптимизации // Материалы 6-й Всероссийской мультиконференции «Проблемы управления». Т. 3. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального ун-та, 2013. С. 195–197.
4. Kozlov V. N. The Metod of Minimization of Linear Functionals Based on Compakt Sets // Proceedings of the 12 international workshop on computer science and information technologies (CSIT 2010), Russia, Moskow-Saint-Petersburg, Russia, 2010. Vol. 2. P. 157–159.