УДК 519.244.4, 519.245

АДАПТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ИНЕРЦИОННОГО ЗЕРКАЛЬНОГО СПУСКА В ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧАХ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

А.В. Назин

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН

Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65

E-mail: nazine@ipu.ru

Ключевые слова: задачи стохастической оптимизации, выпуклая оптимизация, метод зеркального спуска, инерционный зеркальный спуск, адаптивные алгоритмы.

Аннотация: Рассматривается задача минимизации математического ожидания неизвестной выпуклой функции потерь $f(x)$ на заданном выпуклом компакте $X \in \mathbb{R}^N$, причем оракул последовательно выдает стохастические субградиенты $\partial_x f(x_k)$ в указываемых пользователем точках $x_k \in X$. Цель состоит в адаптивной модификации метода инерционного зеркального спуска (ИЗС), предложенного в [1], близкого к детерминированным субградинтным методам с двойным усреднением [2]. Описывается адаптивный алгоритм ИЗС, доказывается теорема о верхней границе на ошибку по целевой функции, то есть на разницу текущего значения средних потерь и минимума. Проводится сравнение с неадаптивным алгоритмом ИЗС.

1. Введение

Метод зеркального спуска (МЗС) [3] относится к прямо-двойственным методам выпуклой оптимизации градиентного типа, в которых используется как прямое, так и двойственное пространство: текущие наблюдения субградиента целевой функции формируют траекторию в двойственном пространстве, и эта траектория отображается в заданное множество исходного пространства, на котором и проводится оптимизация. Указанное отображение является функциональным параметром и наряду с другими параметрами позволяет не только контролировать, но и в какой-то степени минимизировать верхнюю границу ошибки относительно целевой функции. При этом обычно предполагается известным ограничение на норму вектора наблюдений субградиента функции. В частном случае, когда оба пространства евклидовы, а отображение двойственного пространства на заданный выпуклый компакт соответствует метрической проекции, МЗС совпадает со стандартным методом проекции градиента. В общем же случае МЗС обладает дополнительными степенями свободы, и их правильное использование может иногда существенно расширить возможности метода даже в условиях большой размерности [3,4]. Отметим, что подавляющее большинство работ по МЗС относится к получению гарантированной верхней границы ошибки на всем классе рассматриваемой задачи оптимизации, когда последовательности параметров метода определены априори и не меняются в процессе наблюдений градиента и итеративного оценивания оптимальной точки. Известны и адаптивные алгоритмы зеркального спуска (АЗС); см., например, [5], [6] и указанные там ссылки. В настоящем докладе этот подход развивается для достаточно общей постановки, причем представлены адаптивные АЗС с инерцией [1]. В целом АЗС с инерцией интересны тем, в частности, что потенциально позволяют испльзовать их структуру для построения алгоритмов управления как статических, так и динамических объектов [2]. Кроме того, отметим, что условие на ограничение нормы вектора наблюдения субградиента здесь несколько более жесткое, чем это делается в неадаптивных работах по МЗС, но позволяет уточнить верхнюю границу по целевой функции за счет учета точных значений норм текущих субградиентов, а не их верхней оценки.

2. Обозначения и определения [4]

Пусть E — пространство $\mathbb{R}^n$, оснащенное нормой $\|\zeta\|$ (не обязательно евклидовой), где вектор $\zeta = (\zeta^{(1)}, \dots, \zeta^{(n)})^T \in E$; тогда двойственное пространство E^* представляет собой $\mathbb{R}^n$, оснащенное нормой

$$\|\zeta\|_* = \max_{x\in E:\|x\|\leqslant 1} \zeta^T x,\ \forall \zeta \in E^*.$$

Пусть X — выпуклое замкнутое подмножество в E, параметр (обобщенная температура) $\beta > 0$, а функция $V : X \to \mathbb{R}_+$ выпуклая. Назовем β-сопряженной функцией к V преобразование типа Лежандра–Фенхеля W_β от произведения βV, а именно:

$$W_\beta(\zeta) = \sup_{x\in X}\{-\zeta^T x - \beta V(x)\}, \quad \forall \zeta \in E^*.$$

Введем важное предположение, представляющее собой следующее условие Липшица в сопряженных нормах $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$.

Предположение (L). *Выпуклая функция $V : X \to \mathbb{R}_+$ такова, что ее β-сопряженная W_β непрерывно дифференцируема на E^* с градиентом ∇W_β, удовлетворяющим неравенству*

$$\|\nabla W_\beta(\zeta) - \nabla W_\beta(\zeta')\| \leqslant \frac{1}{\alpha\beta}\|\zeta - \zeta'\|_*, \quad \forall \zeta, \zeta' \in E^*,\ \beta > 0,$$

где постоянная $\alpha > 0$ не зависит от β.

Известно [4], что предположение (L) связано с условием α-сильной выпуклости функции V относительно исходной нормы $\|\cdot\|$, причем

$$\operatorname*{argmax}_{x\in X}\{-\zeta^T x - \beta V(x)\} = -\nabla W_\beta(\zeta) \in X, \quad \forall \zeta \in E^*. \tag{1}$$

Такую функцию V с $\min_{x\in X} V(x) = 0$ называем прокси-функцией.

3. Постановка задачи

Рассмотрим задачу стохастической минимизации неизвестной функции

$$f(x) = \mathbb{E}Q(x, Z), \quad x \in X, \tag{2}$$

где X — известное выпуклое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, n — натуральное число, Z — случайная величина, принимающая значения в некотором множестве $\mathcal{Z}$, функция потерь $Q : X \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}_+$ такова, что случайная функция $Q(\cdot, Z)$ выпукла для почти всех Z, $\mathbb{E}$ — полное математическое ожидание. Пусть обучающая выборка $Z_1, \ldots, Z_t$ представляет собой последовательность независимых случайных величин Z_k с одним и тем же неизвестным распределением, что и Z. Цель состоит в критериальной минимизации функции $f(x)$ на X [7]. Это означает, что качество любой допустимой оценки $x_t = x_t(Z_1, \ldots, Z_t) \in X$, $t \geqslant 1$, к которой обращается оракул на шаге t, характеризуется разностью

$$\mathbb{E}f(x_t) - \min_{x \in X} f(x), \tag{3}$$

причем минимум в (3) достижим. Формирование конкретной оценки должно гарантировать по возможности «малую» величину разности (3) на заданном классе функций f. По сути, речь идет о гарантируемой критериальной скорости сходимости на классе рассматриваемых задач оптимизации. Отметим, что предложенный в [1] неадаптивный алгоритм ИЗС обеспечивает такую верхнюю оценку (см. ниже).

Далее, пусть определены стохастические субградиенты

$$u_k(x) = \partial_x Q(x, Z_k), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

то есть измеримые на X функции, что при каждом $x \in X$ математическое ожидание $\mathbb{E}u_k(x)$ принадлежит субдифференциалу $\mathcal{D}f(x)$. Наконец, будем предполагать наличие оракула первого порядка, то есть на каждом шаге $k = 1, 2, \ldots$ при любом значении $x_{k-1} \in X$ наблюдается субградиент $u_k(x_{k-1})$ в силу (4).

4. Неадаптивный алгоритм ИЗС и верхняя граница

Для начала рассмотрим алгоритм ИЗС [1], представляющий собой рекуррентную процедуру оптимизации, которая осуществляет градиентный спуск в двойственном пространстве E^* с отображением траектории в исходное пространство E и дополнительным инерциальным членом. На каждом шаге k рассматривается двойственная переменная ζ_k, определяемая стохастическими субградиентами $u_i(x_{i-1})$, $i = 1, \ldots, k$, а исходная переменная представляет собой «зеркальное отображение» ζ_k в E с текущим усреднением. Для настройки алгоритма используется две положительные последовательности: γ_k — «размер шага», и β_k — «обобщенная температура», причем $\beta_k \geqslant \beta_{k-1}$, $\forall\, k \geqslant 1$. Алгоритм определяется следующим образом:

1) при $k = 0$ задаются начальные значения $\zeta_0 = 0$ и $x_0 = -\nabla W_{\beta_0}(\zeta_0)$;

2) для $k = 1, \ldots, t$ выполняется рекуррентный пересчет

$$\zeta_k = \zeta_{k-1} + \gamma_k u_k(x_{k-1}), \tag{5}$$

$$x_k = x_{k-1} - \frac{1}{k+1}\left(x_{k-1} + \nabla W_{\beta_k}(\zeta_k)\right). \tag{6}$$

Выбираем параметры γ_k и β_k независимые от наблюдений субградиентов:

$$\gamma_k \equiv 1, \quad \beta_k = \beta_0\sqrt{1+k}, \quad k \geqslant 1; \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть X — выпуклое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$, а функция потерь $Q(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условиям, приведенным в разделе 3, и, кроме того,*

$$\sup_{x \in X} \mathbb{E}\|\partial_x Q(x, Z)\|_*^2 \leqslant L_{X,Q}^2, \tag{8}$$

где постоянная $L_{X,Q} \in (0, \infty)$. *Пусть* V — *прокси-функция на* X *с параметром* $\alpha > 0$ *из предположения 1, и пусть существует* $x^* \in \operatorname*{Argmin}_{x \in X} f(x)$. *Тогда для любого целого* $t \geqslant 1$ *оценка* x_t, *определенная алгоритмом* (5), (6) *со стохастическими субградиентами (4) и параметрами* γ_k *и* β_k *из* (7) *с произвольным* $\beta_0 > 0$, *удовлетворяет неравенству*

$$\mathbb{E}\, f(x_t) - \min_{x \in X} f(x) \leqslant \left(\beta_0 V(x^*) + \frac{L_{X,Q}^2}{\alpha \beta_0} \right) \frac{\sqrt{t+2}}{t+1}.$$

Если, кроме того, $\overline{V}$ — *постоянная, такая что* $V(x^*) \leqslant \overline{V}$, *и при известном* $L_{X,Q}$ *выбираем* $\beta_0 = L_{X,Q}\, (\alpha \overline{V}\,)^{-1/2}$, *то*

$$\mathbb{E}\, f(x_t) - \min_{x \in X} f(x) \leqslant 2\, L_{X,Q} \left(\alpha^{-1} \overline{V}\, \right)^{1/2} \frac{\sqrt{t+2}}{t+1}. \tag{9}$$

В частности, можно взять $\overline{V} = \max_{x \in X} V(x)$.

Доказательство теоремы 1. Приводится в [1].

5. Адаптивный алгоритм ИЗС и основной результат

В отличие от предыдущего алгоритма (5), (6) (при $\gamma_k \equiv 1$) добавляется рекуррентный пересчет последовательности β_k, использующий на каждом шаге $\|\cdot\|_*$-норму наблюденного субградиента:

$$\beta_k = \sqrt{\beta_{k-1}^2 + \left(\alpha \overline{V}\right)^{-1} \|u_k(x_{k-1})\|_*^2}, \quad k \geqslant 1. \tag{10}$$

Начальные значения $\zeta_0 = 0$ и $x_0 = -\nabla W_{\beta_0}(\zeta_0)$ выбираются теми же, что и в неадаптивном алгоритме ИЗС, а β_0 указывается ниже, в условиях теоремы 2.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы 1 выполняется предположение*

$$\sup_{x \in X} \|\partial_x Q(x, Z)\|_* \leqslant L_{X,Q} \quad \text{п.н.} \tag{11}$$

и используется оценка x_t *из алгоритма* (5), (6) *и* (10) *со стохастическими субградиентами из (4) и* $\beta_0 = L_{X,Q} \left(2\alpha \overline{V}\right)^{-1/2}$. *Тогда для любого целого* $t \geqslant 1$

$$\mathbb{E}\, f(x_t) - \min_{x \in X} f(x) \leqslant \frac{2}{t} \left(\alpha^{-1} \overline{V}\right)^{1/2} \mathbb{E} \sqrt{0.5 L_{X,Q}^2 + \sum\nolimits_{k=1}^{t} \|u_k(x_{k-1})\|_*^2} \leqslant \tag{12}$$

$$\leqslant 2 \left(\alpha^{-1} \overline{V}\,\right)^{1/2} \frac{\sqrt{t+0.5}}{t}, \tag{13}$$

где $\overline{V} \geqslant V(x^*)$; *если* X — *выпуклый компакт, то можно положить* $\overline{V} = \max_{x \in X} V(x)$.

Доказательство теоремы 2. Запишем (П.1) в [1] следующим образом:

$$\begin{gathered} \mathbb{E} \left[\sum\nolimits_{i=1}^{t} (f(x_{i-1}) - f(x)) + \sum\nolimits_{i=1}^{t} \tau_{i-1} \left(f(x_{i-1}) - f(x_{i-2}) \right) \right] \leqslant \\ \leqslant \mathbb{E} \left[\beta_t V(x) + \sum\nolimits_{i=1}^{t} \tfrac{\|u_i(x_{i-1})\|_*^2}{2\alpha \beta_{i-1}} \right]. \end{gathered} \tag{14}$$

Аналогично [1] повторяем преобразование левой части (14). Теперь делим обе части на $\tau_t = t$, и при $x = x^*$ получаем

$$\mathbb{E}[f(x_{t-1}) - f(x^*)] \leqslant \frac{\overline{V}}{t} \mathbb{E} \left[\beta_t + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{t} \frac{\|u_i(x_{i-1})\|_*^2}{\alpha \overline{V} \beta_{i-1}} \right]. \tag{15}$$

Обозначим $c_k = \left(\alpha \overline{V}\right)^{-1} \|u_i(x_{i-1})\|_*^2$, и в силу (10) имеем $\beta_t = \sqrt{\beta_0^2 + \sum_{k=1}^t c_k}$. Суммируя по частям, получаем, с учетом монотонности β_k:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^t \frac{\|u_i(x_{i-1})\|_*^2}{\alpha\overline{V}\beta_{i-1}} &= \sum_{i=1}^t \frac{c_i}{\beta_{i-1}} = \sum_{i=1}^t \frac{c_i}{\beta_i} + \sum_{i=1}^t c_i \left(\frac{1}{\beta_{i-1}} - \frac{1}{\beta_i}\right) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{k=1}^t \frac{c_k}{\sqrt{\beta_0^2 + \sum_{i=1}^k c_i}} + \frac{\sup c_k}{\beta_0} \leqslant \int_0^{\sum_{i=1}^t c_i} \frac{dv}{\sqrt{\beta_0^2 + v}} + \frac{L_{X,Q}^2}{\alpha\overline{V}\beta_0}. \end{aligned} \tag{16}$$

Подставляя эту оценку сверху, приходим к

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}f(x_t) - \min_{x\in X} f(x) \leqslant \frac{\overline{V}}{t}\mathbb{E}\left(2\beta_t - \beta_0 + \frac{L_{X,Q}^2}{2\alpha\overline{V}\beta_0}\right) = \\ &= \frac{2}{t}\left(\alpha^{-1}\overline{V}\right)^{1/2}\mathbb{E}\sqrt{0.5L_{X,Q}^2 + \sum_{k=1}^t \|u_k(x_{k-1})\|_*^2} \leqslant 2L_{X,Q}\left(\alpha^{-1}\overline{V}\right)^{1/2}\frac{\sqrt{t+0.5}}{t}. \end{aligned} \tag{17}$$

В последних соотношениях использованы выражение доказываемой теоремы для β_0 и известная лемма Иенсена. Теорема доказана.

6. Заключение

Алгорим ИЗС (5), (6) и (10) отличается от неадаптивной версии алгоритма (5)–(7) тем, что последовательность β_k в нем не определена априори, а формируется в соответствии с рекуррентной формулой (10). Сравнивая результаты, сформулированные в теоремах 1 и 2, можно видеть, что адаптивный ИЗС (5), (6) и (10), гарантируя ту же верхнюю границу ошибки (3) на всем классе рассматриваемых задач оптимизации, обеспечивает улучшенную верхнюю границу еще и за счет адаптивности. Некоторой платой за эту адаптивность является более жесткое условие (11) по сравнению с (8).

Работа поддержана грантом Российского научного фонда № 16–11–10015.

Список литературы

1. Назин А.В. Алгоритмы инерционного зеркального спуска в выпуклых задачах стохастической оптимизации // Автоматика и телемеханика. 2018. № 1. С. 100-112.
2. Nesterov Yu., Shikhman V. Quasi-monotone Subgradient Methods for Nonsmooth Convex Minimization // Journal of Optimization Theory and Applications. 2015. Vol. 165, No. 3. P. 917-940.
3. Немировский А.С., Юдин Д.Б. Сложность задач и эффективность методов оптимизации. М.: Наука, 1979.
4. Юдицкий А.Б., Назин А.В., Цыбаков А.Б., Ваятис Н. Рекуррентное агрегирование оценок методом зеркального спуска с усреднением // Проблемы передачи информации. 2005. Т. 41, Вып. 4. С. 78-96.
5. Nazin A., Polyak B. Adaptive Randomized Algorithm for Finding Eigenvector of Stochastic Matrix with Application to PageRank // Proceedings of the Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference. Shanghai, P.R. China, December 16-18, 2009. P. 127–132. DOI: 10.1109/CDC.2009.5400036
6. Назин А.В. Адаптивные алгоритмы зеркального спуска в задачах выпуклой стохастической оптимизации // Труды ИСА РАН. 2014. Т. 64, № 3. С. 7-12.
7. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Критериальные алгоритмы стохастической оптимизации // Автоматика и телемеханика. 1984. № 6. С. 95–104.