УДК 519.855

ЗАДАЧА ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, КОЭФФИЦИЕНТЫ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ КОТОРОЙ НЕЛИНЕЙНО ЗАВИСЯТ ОТ НЕКОТОРОГО ПАРАМЕТРА

С.Н. Уксусов
Воронежский государственный технический университет
Россия, 394006, Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84
E-mail: uksusov.s@mail.ru

С.А. Баркалов
Воронежский государственный технический университет
Россия, 394006, Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84
E-mail: barkalov@vgasu.vrn.ru

Ключевые слова: линейное программирование, параметрическое программирование, целевая функция, базисное решение, симплекс-метод, метод жордановых исключений, оптимальный опорный план.

Аннотация: Данная работа посвящена разработке алгоритма решения задачи линейного параметрического программирования, коэффициенты целевой которой являются квадратичными функциями некоторого параметра. Данный алгоритм заключается в сведении задачи к задаче параметрического программирования с несколькими параметрами в целевой функции. Последняя задача решена симплекс-методом, основанном на методе жордановых исключений.

1. Введение

В работе рассматривается следующая задача параметрического программирования. Требуется найти максимум функции

(1) $$f(X)=\left(\alpha_1^1 t^2+\alpha_2^1 t+\alpha_3^1\right)\cdot x_1+\left(\alpha_1^2 t^2+\alpha_2^2 t+\alpha_3^2\right)\cdot x_2+\cdots+\left(\alpha_1^n t^2+\alpha_2^n t+\alpha_3^n\right)\cdot x_n,$$

при условии выполнения следующих ограничений

(2) $$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\le b_m, \\ x_1,x_2,\ldots,x_n\ge 0, \\ t\in[c;\ d]. \end{cases}$$

Коэффициенты целевой функции (1) предлагаемой задачи являются квадратичными функциями некоторого параметра t. Система ограничений (2) соответствует стандартной задаче линейного программирования [1]. Однако предлагаемый алгоритм решения в полной мере применим к решению общих задач параметрического программирования.

К задачам (1)-(2) сводятся, в частности, задачи управления производством в том случае, когда цена на произведенную продукцию нелинейно зависит от некоторого параметра (например, от срока реализации готовой продукции, курса доллара, и т.п.)

Алгоритмы решения задач, в которых коэффициенты целевой функции

(3) $$f(X) = c_1(t)\cdot x_1 + c_2(t)\cdot x_2 + \cdots + c_n(t)\cdot x_n$$

являются линейными или ступенчатыми функции подробно рассмотрены в работах [2-6] и [7], соответственно. В работе [2] предложен алгоритм решения задачи параметрического программирования, в которой коэффициенты целевой функции (3) и правые части системы ограничений (2) зависят от двух независимых параметров. Кроме того, в работе [8] приведен алгоритм решения задачи квадратического программирования с целевой функцией

$$f(X) = c_1\cdot x_1^2 + c_2\cdot x_2^2 + \cdots + c_n\cdot x_n^2 \to \max .$$

Во всех, приведенных выше случаях задачи решаются симплекс-методом, основанным на методе жордановых исключений [1].

2. Алгоритм решения задачи с целевой функцией, нелинейно зависящей от параметра

- Сначала преобразуем целевую функцию задачи (1), выделив во всех коэффициентах полные квадраты:

(3) $$\alpha_1^1 t^2 + \alpha_2^1 t + \alpha_3^1 = \alpha_1^1\left(t - t_1\right)^2 + \beta_1^1, \ldots, \alpha_1^n t^2 + \alpha_2^n t + \alpha_3^n = \alpha_1^n\left(t - t_1\right)^2 + \beta_1^n;$$

- Произведем замену переменных $\left(t - t_1\right)^2 = \tau_1, \ldots, \left(t - t_n\right)^2 = \tau_n$, при этом коэффициенты целевой функции (1) становятся линейными функциями, но при этом каждый коэффициент зависит от своего параметра.

В том случае, когда параметр t изменяется в пределах $c \le t \le d$, каждый из параметров $\tau_j\ \left(j = 1,\ldots,n\right)$ изменяется в пределах $\left(c - t_j\right)^2 \le \tau_j \le \left(d - t_j\right)^2$.

Таким образом, мы приходим к следующей задаче параметрического программирования:

$$f(X) = \left(\alpha_1^1\tau_1 + \beta_1^1\right)\cdot x_1 + \cdots + \left(\alpha_1^n\tau_n + \beta_1^n\right)x_n \to \max$$

(4) $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0, \\ \left(c - t_j\right)^2 \le \tau_j \le \left(d - t_j\right)^2, \quad j = 1,\ldots,n. \end{cases}$$

Алгоритм решения задачи (4) с n параметрами в литературе до настоящего времени не рассматривался. Однако, нетрудно показать, что данная задача может быть решена методом жордановых исключений аналогично линейной задаче, содержащей один параметр [2, 3, 7]. Необходимо лишь внести в данный алгоритм некоторые изменения.

3. Пример решения задачи с целевой функцией

В качестве иллюстрации рассмотренного выше метода решим следующую задачу параметрического программирования:

Пример 1. Требуется решить следующую задачу параметрического программирования:

$$f(X) = \left(-3t^2 + 6t + 1\right) \cdot x_1 + \left(2t^2 + 8t + 9\right) \cdot x_2 \to \max$$

$$(5)\qquad \begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \qquad \le 4, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ t \in [1;\ 2]. \end{cases}$$

Решение примера 1. Преобразуем коэффициенты целевой функции, выделив полные квадраты:

$$-3t^2 + 6t + 1 = -3(t-1)^2 + 4,\ 2t^2 + 8t + 9 = 2(t+2)^2 + 1\,.$$

Обозначим через $\tau_1 = (t-1)^2$, $\tau_2 = (t+2)^2$. Тогда задаче (5), при значении параметров $t_0 = 1$, $\tau_1^0 = (1-1)^2 = 0,\ \tau_2^0 = (1+2)^2 = 9$, будет соответствовать жорданова таблица:

Таблица 1. Жорданова таблица, соответствующая исходной задаче (5).

	$-x_1$	$-x_2$	**1**
y_1	1	1	5
y_2	1	0	4
y_3	–2	1	2
y_4	–2	–1	–2
$f(X)$	–4	–1	0
a	3	–2	0
b	–4	–1	0

Две последние строки таблицы 1 соответствуют коэффициентам целевой функции при переменных $\tau_1 = (t-1)^2$ и $\tau_2 = (t+2)^2$. Элементы третьей снизу строки соответствуют коэффициентам целевой функции при значении параметра $t_0 = 1$. Решая задачу (5) симплекс-методом, последовательно, за четыре шага жордановых исключений [1-3, 7], приходим к таблице 2:

Таблица 2. Жорданова таблица, соответствующая оптимальному опорному плану задачи при $t = 1$.

	$-y_2$	$-y_1$	**1**
x_2	–1	1	1
y_4	1	1	7
y_3	3	–1	9
x_1	1	0	4
$f(X)$	3	1	17
a	–5	2	14
b	3	1	17

В соответствие с [1-3, 7] из таблицы 2 находим оптимальный опорный план задачи (5) при значении параметра $t_0 = 1$ и соответствующее значение целевой функции:

$$X_1^{опт} = (4;\ 1), \quad \max_{t=1} f(X) = 17 .$$

Далее увеличивая значение параметра t, находим такое его значение $t_1 \in [1;\ 2]$, при котором одна из оценок свободных переменных [1] (элементы третьей снизу строки) перестанет быть положительной и, следовательно, план $X_1 = (4;\ 1)$ перестанет быть оптимальным. Оценки свободных переменных, соответствующие таблице 2, остаются неотрицательными при условии выполнения системы неравенств:

$$\begin{cases} -3\tau_1 + 4 = -3(t-1)^2 + 4 \ge 0, \\ 2\tau_2 + 1 = 2(t+2)^2 + 1 \ge 0, \\ 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Решением данной системы является интервал $t \in \left[1;\ \sqrt{0,6}+1\right]$. Следовательно, план $X_1 = (4;\ 1)$ является оптимальным на всем промежутке $t \in \left[1;\ \sqrt{0,6}+1\right]$. При этом значение целевой функции вычисляется по формуле

(6) $$\max_{1 \le t \le \sqrt{0,6}+1} f(X) = \left(-3t^2 + 6t + 1\right) \cdot 4 + \left(2t^2 + 8t + 9\right) \cdot 1 = -10t^2 + 32t + 13 .$$

При значении параметра $t > t_1 = \sqrt{0,6}+1$ оценка свободной переменной, соответствующая первому столбцу таблицы 2 перестает быть положительной, и, следовательно, план $X_1 = (4;\ 1)$ не является оптимальным. Для нахождения оптимального плана задачи при $t > \sqrt{0,6}+1$, сделаем пересчет жордановой таблицы 2. Для этого разрешающий элемент (в соответствие с [1]) выберем в первом столбце таблицы. Переходим к таблице 3:

Таблица 3. Жорданова таблица, соответствующая оптимальному опорному плану задачи при $t > \sqrt{0,6}+1$.

	$-y_3$	$-y_1$	**1**
x_2	1/3	2/3	4
y_4	–1/3	4/3	4
y_2	1/3	–1/3	3
x_1	–1/3	1/3	1
$f(X)$	0	11/5	127/5
a	5/3	1/3	29
b	–1	2	8

Из таблицы 3 находим оптимальный опорный план $X_2^{опт} = (1;\ 4)$ задачи (5) при значении параметра $t > t_1 = \sqrt{0,6}+1$. Значение целевой функции при этом вычисляется по формуле (6).

Далее алгоритм решения задачи повторяется. В итоге мы получим, что план $X_2 = (1;\ 4)$ является оптимальным на оставшейся части промежутка $t \in [0;\ 1]$, то есть при $t \in \left[\sqrt{0,6}+1;\ 1\right]$. Значение целевой функции вычисляется по формуле (7):

(7) $$\max_{\sqrt{0,6}+1\le t\le 2} f\left(X\right)=\left(-3t^2+6t+1\right)\cdot 1+\left(2t^2+8t+9\right)\cdot 4=5t^2+38t+37.$$

4. Заключение

Таким образом, был разработан алгоритм решения задач параметрического программирования, коэффициенты целевой функции которой нелинейно зависят от некоторого параметра. В данной работе эта зависимость выражалась квадратичными функциями.

Однако предложенный алгоритм, после соответствующей доработки, позволяет решать задачи в случае более сложной зависимости от параметра. Данный алгоритм существенно опирается на симплекс-методе, реализованном на основе метода жордановых исключений. Кроме этого метод жордановых исключений позволяет решать задачи гораздо больших размерностей, чем стандартно организованный симплекс-метод.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 17-01-00138а.

Список литературы

1. Уксусов С.Н. Метод Штифеля и его применение в линейной алгебре и математическом программировании / Учебно-методическое пособие. Воронеж: Изд-во ВГУ, 2003. 73 с. (http://window.edu.ru/resource/013/27013).
2. Уксусов С.Н., Соловьев А.В. Решение задачи динамического управления производством методом жордановых исключений // Современные сложные системы управления: материалы международной научно-практической конференции. Воронеж, 8-10 июля 2014 г. в 2 ч. Воронеж, 2014. Ч. 2. С. 124-129.
3. Уксусов С.Н., Баркалов С.А., Зенищева Г.В. Решение задачи планирования производства с переменными ресурсами методом жордановых исключений // Сборник трудов международной конференции «Управление современными сложными системами». 2013. С. 210-220.
4. Barkalov S.A., Polovinkina A.I., Uksusov S.N. The Task of the Theory of Games with Variable Payments / // IEEE 11th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT). 20-22 September 2017, Moscow, Russia. M.: 2017. T. 2. P. 213-216.
5. Уксусов С.Н., Соловьев А.В. Математическое моделирование задач управления строительством с параметрами // Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2014). Тезисы докладов 25 международной конференции, Судак, 21-30 сентября 2014 г. Судак, 2014. С. 76.
6. Уксусов С.Н., Соловьев А.В. Математическая модель рентабельности затрат на производство продукции при условии ее хранения // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Сер. Управление строительством. Воронеж, 2014. Вып. 1 (6). С. 133-142.
7. Уксусов С.Н., Егорочев С.В. Решение задачи планирования производства с учетом хранения произведенной продукции методом жордановых исключений / Сборник трудов международной конференции «Управление современными сложными системами». 2013. С. 198-210.
8. Зильберова И.Ю., Маилян А.Л., Баркалов С.А., Уксусов С.Н. Метод Штифеля в выпуклом программировании // Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ». 2015. Т. 7, № 6.