УДК 519.6

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ЗАДАЧАХ МАРШРУТИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А.Г. Ченцов

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Россия, 620108, Екатеринбург, Софьи Ковалевской ул., 16

E-mail: chentsov@imm.uran.ru

Ключевые слова: маршрут, трасса, условия предшествования

Аннотация: Рассматриваются задачи маршрутизации перемещений с ограничениями и функциями стоимости, допускающими зависимость от списка заданий. Объектами посещения являются непустые конечные множества (мегаполисы); каждое посещение сопровождается выполнением определенных работ, именуемых внутренними. По постановке задачи требуется выбрать начальное состояние, вариант нумерации мегаполисов и конкретную траекторию их посещения (трассу). Для решения используется вариант широко понимаемого динамического программирования. Данный вариант определяет структуру и используется для целей построения оптимального решения (в задачах умеренной размерности) и для локального улучшения эвристик, если размерность велика. Предлагаемые методы реализованы в виде алгоритмов и программ для ПЭВМ и МВС.

1. Введение

Рассматривается экстремальная задача маршрутизации с ограничениями и функциями стоимости, допускающими зависимость от списка заданий; постановка ориентирована на инженерные приложения, связанные с задачами, возникающими в атомной энергетике (минимизация дозовой нагрузки при демонтаже системы излучающих элементов) и машиностроении (проблема управления инструментом при листовой резке на машинах с ЧПУ). Используется модель мегаполисов, определяемых как непустые конечные множества и являющихся объектами посещения и выполнения тех или иных (внутренних) работ.

Естественным прототипом исследуемой постановки является известная труднорешаемая задача коммивояжера [1, 2], однако в рассматриваемом случае возникают существенные особенности качественного характера. В основе предлагаемых методов находится широко понимаемое динамическое программирование (ДП), реализуемое в глобальном (для задач умеренной размерности) или локальном (оптимизирующие вставки, мультивставки) вариантах. Естественные для прикладных задач условия предшествования используются в «положительном направлении» в смысле снижения сложности вычислений. Так на этапе построения функции Беллмана удается (при этих условиях) ограничиться построением ее значений в пределах специальных слоев пространства позиций, что позволяет в типичных случаях получать существенное продвижение в размерности задач, допускающих оптимальное решение по методу ДП. Конструкция, развивающая схему Р.Беллмана [3], позволяет [4] в целом ряде случаев оптимизировать не только маршрут и трассу, но и точку старта, без существенного усложнения оптимизационной процедуры. В задачах маршрутизации, имеющих большую размерность, на основе ДП можно осуществлять [5–7] локальную оптимизацию посредством применения оптимизирующих вставок, а также итерационных режимов с применением упомянутых вставок.

Разработанные методы были использованы при построении алгоритмов и программ для решения прикладных задач; так в [8, 9] указан вариант применения ДП в задаче о последовательном демонтаже излучающих элементов (см. также [10]) в условиях аварийных ситуаций на АЭС, а в [12] построены алгоритмы решения задачи управления инструментом при листовой резке на машинах с ЧПУ в условиях ограничений различных типов. Среди последних, наряду с условиями предшествования, отметим условия жесткости листа и деталей, тепловые допуски (ограничения, связанные с отводом тепла в окрестностях точек врезки)

2. Постановка задачи

Используем обозначения [4–11,13]. Фиксируем непустые множества X и X^0, $X^0 \subset X$, число $N \in \mathbb{N} \triangleq \{1; 2; \ldots\}$ ($\triangleq$ - равенство по определению), $N \geqslant 2$, непустые конечные множества $M_1, \ldots, M_N$, являющиеся подмножествами (п/м) X, и непустые отношения $\mathbb{M}_1, \ldots, \mathbb{M}_N$, $\mathbb{M}_j \subset M_j \times M_j$ при $j \in \overline{1, N} \triangleq \{k \in \mathbb{N} | k \leqslant N\}$. Рассматриваем процессы

$$x^0 \in X^0 \to (x_1^{(1)} \in M_{\alpha(1)} \rightsquigarrow x_2^{(1)} \in M_{\alpha(1)}) \to \ldots \\ \to (x_1^{(N)} \in M_{\alpha(N)} \rightsquigarrow x_2^{(N)} \in M_{\alpha(N)}) \tag{1}$$

(прямые стрелки соответствуют внешним перемещениям, а волнистые — перемещениям, связанным с внутренними работами при посещении мегаполисов); здесь $\alpha \in \mathbb{P}$, где $\mathbb{P}$ — множество всех перестановок множества $\overline{1, N}$, именуемых маршрутами. Выбор α может быть стеснен условиями предшествования, которые задаются множеством $\mathbf{K}, \mathbf{K} \subset \overline{1, N} \times \overline{1, N}$, удовлетворяющим условию 2.2.1 монографии [13]. Множество

$$\mathbb{A} \triangleq \{\alpha \in \mathbb{P} | \forall z \in \mathbf{K} \ \forall t_1 \in \overline{1, N} \ \forall t_2 \in \overline{1, N} \ \ (z = (\alpha(t_1), \alpha(t_2))) \Rightarrow (t_1 < t_2)\}$$

всех допустимых по предшествованию маршрутов непусто (см. [13, (2.2.53)]). Случай $\mathbf{K} = \varnothing$ отвечает отсутствию условий предшествования. Как видно из (1), при фиксации маршрута возможны различные трассы посещения (занумерованных) мегаполисов. Для их введения полагаем при $j \in \overline{1, N}$, что $\mathfrak{M}_j \triangleq \{pr_1(z) : z \in \mathbb{M}_j\}$ и $\mathbf{M}_j \triangleq \{pr_2(z) : z \in \mathbb{M}_j\}$; здесь и ниже всякой упорядоченной паре z сопоставляем ее первый элемент $pr_1(z)$ и второй элемент $pr_2(z)$ (см. [14, с.67]). Через $\mathfrak{M}$ (через $\mathbf{M}$) обозначим объединение всех множеств $\mathfrak{M}_i$, $i \in \overline{1, N}$ (всех множеств $\mathbf{M}_i$, $i \in \overline{1, N}$). Пусть $\mathbb{X} \triangleq X^0 \cup \mathfrak{M}$ и $\mathbf{X} \triangleq X^0 \cup \mathbf{M}$. Множество всех отображений из $\overline{0, N} \triangleq \{0\} \cup \overline{1, N}$

в $\mathbb{X} \times \mathbf{X}$ обозначим через $\mathbb{Z}$ (элементы $\mathbb{Z}$ — суть кортежи $(\mathbf{z}_i)_{i\in\overline{0,N}}$ со значениями в $\mathbb{X} \times \mathbf{X}$ и только они). При $x \in X^0$ и $\alpha \in \mathbb{P}$

$$\mathcal{Z}_\alpha[x] \triangleq \{(\mathbf{z}_t)_{t\in\overline{0,N}} \in \mathbb{Z} | (z_0 = (x,x)) \& (z_t \in \mathbb{M}_{\alpha(t)} \ \ \forall t \in \overline{1,N})\}$$

есть (непустое конечное) множество всех трасс (траекторий), стартующих из x и согласованных с α. Тогда при $x \in X$

$$\tilde{\mathbf{D}}[x] \triangleq \{(\alpha, \mathbf{z}) \in \mathbb{A} \times \mathbb{Z} | \mathbf{z} \in \mathcal{Z}_\alpha[x]\}$$

есть непустое конечное множество всех допустимых решений (ДР), стартующих из x. Наконец,

$$\mathbf{D} \triangleq \{(\alpha, \mathbf{z}, x) \in \mathbb{A} \times \mathbb{Z} \times X^0 | (\alpha, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]\}$$

есть «полное» множество ДР. Для всякого непустого множества T через $\mathcal{R}_+[T]$ обозначаем множество всех функций из T в $\mathbb{R}_+ \triangleq \{\xi \in \mathbb{R} | 0 \leqslant \xi\}$ ($\mathbb{R}$ — вещественная прямая). Фиксируем $\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}\times\mathbb{X}\times\mathfrak{N}]$, $c_1 \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X}\times\mathbf{X}\times\mathfrak{N}], \ldots, c_N \in \mathcal{R}_+[\mathbb{X}\times\mathbf{X}\times\mathfrak{N}]$, $f \in \mathcal{R}_+[\mathbf{X}]$ (функции стоимости), где $\mathfrak{N}$ — семейство всех непустых п/м $\overline{1,N}$. Учитывая определения [15, с.17], полагаем что при $\alpha \in \mathbb{P}$ и $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}$

$$\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \triangleq \sum_{s=1}^{N} [\mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(s-1)), \mathrm{pr}_1(\mathbf{z}(s)), \alpha^1(\overline{s,N})) + c_{\alpha(s)}(\mathbf{z}(s), \alpha^1(\overline{s,N}))] \\ + f(\mathrm{pr}_2(\mathbf{z}(N))).$$

При $x \in X^0$ имеем задачу $\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \longrightarrow \min$, $(\alpha, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]$, которой сопоставляется экстремум $V[x] \in \mathbb{R}_+$ (наименьшее из $\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}]$, $(\alpha, \mathbf{z}) \in \tilde{\mathbf{D}}[x]$) и непустое множество решений

$$(\mathrm{SOL})[x] \triangleq \{(\alpha_0, \mathbf{z}_0) \in \tilde{\mathbf{D}}[x] \mid \mathfrak{C}_{\alpha_0}[\mathbf{z}_0] = V[x]\}.$$

Полная задача $\mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] \longrightarrow \inf$, $(\alpha, \mathbf{z}, x) \in \mathbf{D}$, характеризуется экстремумом

$$\mathbb{V} \triangleq \inf_{(\alpha,\mathbf{z},x)\in\mathbf{D}} \mathfrak{C}_\alpha[\mathbf{z}] = \inf_{x\in X^0} V[x] \in \mathbb{R}_+.$$

Задача $V[x] \longrightarrow \inf$, $x \in X^0$, оптимизации начального состояния рассматривалась в [4]. Сейчас ограничимся случаем, когда множество X^0 конечно (более общую постановку см. в [4]).

3. Динамическое программирование

Используем вариант ДП работ [4, 8–11], восходящий к [13, §4.9]. Построим расширение основной задачи, определяя отображение $\mathbf{I}$, действующее в $\mathfrak{N}$, правилом: при $K \in \mathfrak{N}$

(2) $$\mathbf{I}(K) \triangleq K \setminus \{pr_2(z) : z \in \Xi[K]\},$$

где $\Xi[K] \triangleq \{z \in \mathbf{K} | (pr_1(z) \in K) \& (pr_2(z) \in K)\}$; (2) — правило вычеркивания (заданий из списка). Пусть

$$\mathfrak{C} \triangleq \{\mathcal{K} \in \mathfrak{N} | \forall z \in \mathbf{K}\ (pr_1(z) \in K) \Rightarrow (pr_2(z) \in K)\}$$

(семейство существенных списков заданий). При $s \in \overline{1,N}$ определяем $\mathfrak{C}_s \triangleq \{K \in \mathfrak{C} | s = |K|\}$ ($|\tilde{K}|$ – мощность множества $\tilde{K} \in \mathfrak{N}$); $\mathfrak{C}_N = \{\overline{1,N}\}$ (синглетон) и $\mathfrak{C}_1 = \{\{t\} : t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\}$, где $\mathbf{K}_1 \triangleq \{pr_1(z) : z \in \mathbf{K}\}$. Наконец,

$$\mathfrak{C}_{s-1} = \{\mathcal{K} \setminus \{t\} : K \in \mathfrak{C}_s, t \in \mathbf{I}(K)\}\ \forall s \in \overline{2,N}.$$

Получили реккурентную процедуру $\mathfrak{C}_N \to \mathfrak{C}_{N-1} \to \ldots \to \mathfrak{C}_1$. Введем слои пространства позиций; полагаем $D_N \triangleq \{(x, \overline{1,N}) : x \in X^0\}$ и $D_0 \triangleq \{(x, \varnothing) : x \in \tilde{\mathcal{M}}\}$, где $\tilde{\mathcal{M}}$ есть объединение всех множеств $\mathbf{M}_t, t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1$. При $s \in \overline{1,N-1}$ и $K \in \mathfrak{C}_s$ вводим $J_s(K) \triangleq \{j \in \overline{1,N} \setminus K | \{j\} \cup K \in \mathfrak{C}_{s+1}\}$, а также

$$\mathcal{M}_s[K] \triangleq \bigcup_{j \in J_s(K)} \mathbf{M}_j,\ \ \mathbb{D}_s[K] \triangleq \{(x,K) : x \in \mathcal{M}_s[K]\}.$$

Определяем при $s \in \overline{1,N-1}$ слой D_s в виде объединения всех $\mathbb{D}_s[K], K \in \mathfrak{C}_s$. Получили непустые слои $D_0, D_1, \ldots D_N$ со свойством

$$(pr_2(z), K \setminus \{j\}) \in D_{s-1}\ \forall s \in \overline{1,N}\ \forall (x,K) \in D_s\ \forall j \in \mathbf{I}(K)\ \forall z \in \mathbb{M}_j. \tag{3}$$

С учетом (3) конструируем слои функции Беллмана на множествах $D_0, D_1, \ldots D_N$, полагая $v_0(x, \varnothing) \triangleq f(x)\ \ \forall x \in \tilde{\mathcal{M}}$; если $s \in \overline{1,N}$, то $v_{s-1} \in \mathcal{R}_+[D_{s-1}]$ преобразуется в $v_s \in \mathcal{R}_+[D_s]$ по правилу

$$\begin{aligned} v_s(x,K) \triangleq \min\nolimits_{j \in \mathbf{I}(K)} \min\nolimits_{z \in \mathbb{M}_j} [\mathbf{c}(x, pr_1(z), K) + c_j(z,K) \\ + v_{s-1}(pr_2(z), K \setminus \{j\})]\ \ \forall (x,K) \in D_s. \end{aligned}$$

Предложение 1. *Если $x \in X^0$, то $V[x] = v_N(x, \overline{1,N})$.*

Таким образом, задача оптимизации начального состояния сводится к следующей: $v_N(x, \overline{1,N}) \to \min, x \in X^0$. Здесь $v_N(\cdot, \overline{1,N})$ есть финальная функция рекуррентной процедуры $v_0 \to v_1 \to \ldots \to v_N$. После нахождения $x_0 \in X^0$ со свойством $v_N(x_0, \overline{1,N}) = \mathbb{V}$ конструируем оптимальное (для точки x_0) ДР $(\alpha_0, \mathbf{z}_0) \in (\mathrm{SOL})[x_0]$, используя процедуру [4–11] (см. в частности [11, раздел 4]). Тогда $(\alpha_0, \mathbf{z}_0, x_0)$ есть оптимальное ДР полной задачи. На этапе построения $v_N(\cdot, \overline{1,N})$ можно ограничиваться процедурой с перезаписью слоев функции Беллмана (см. [7–9]; для несколько иной задачи см. [18]).

Список литературы

1. Gutin G., Punnen A. (Eds.) The traveling salesman problem and its variations. Boston: Springer, 2007. XVIII + 830 p.
2. Cook W.J. In pursuit of traveling salesman. Mathematics at the limits of computation. Princeton, New Jersey: Princeton University press, 2012. 248 p.
3. Беллман Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 219-228.

4. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Оптимизация точки старта в задаче последовательного обхода мегаполисов при наличии условий предшествования // Вестн. ЮУрГУ. Сер. мат. моделирование и программирование. 2018. Т. 11, № 2. С. 83-95 [Optimization of the start point in the GTSP with the precedence conditions // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software].
5. Ченцов А.Г. Беллмановские вставки в задаче маршрутизации с ограничениями и усложненными функциями стоимости // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2014. № 4. С. 122-141.
6. Петунин А.А., Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Элементы динамического программирования в конструкциях локального улучшения эвристических решений задач маршрутизации с ограничениями // Автоматика и телемеханика. 2017. № 4. С. 106-125 [Automation and Remote Control. 2017. Vol. 78, No. 4. P. 666-681].
7. Ченцов А.Г. Оптимизирующие вставки в задачах маршрутизации и их реализация на основе динамического программирования // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2016. Т. 26, № 4. С. 565-578.
8. Ченцов А.Г. Ченцов А.А., Григорьев А.М. Об одной задаче маршрутизации, моделирующей перемещения в радиационных полях // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2017. Т. 27, № 4. С. 540-557.
9. Ченцов А.Г., Ченцов А.А. Модельный вариант задачи о последовательной утилизации источников излучения (итерации на основе оптимизирующих вставок) // Изв. ИМИ УдГУ. 2017. Т. 50 С. 83-109.
10. Ченцов А.А., Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Элементы динамического программирования в экстремальных задачах маршрутизации // Проблемы управления. 2013. № 5. С. 12-21 [Automation and Remote Control. 2014. Vol. 75, No. 3. P. 537-550].
11. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов // АвтоматИка и телемеханика. 2016. № 11. С. 96-117 [Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77, No. 11. P. 1957-1974].
12. Chentsov A.G., Chentsov P.A., Petunin A.A., Sesekin A.N. Model of megalopolises in the tool path optimization for CNC plate cutting machines // International Journal of Production Research. 2018. Vol. 56, No. 14. P. 4819-4830.
13. Ченцов А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» / Ижевский институт компьютерных исследований, 2008. 240 с.
14. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
15. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964. 430 с.
16. Хелд М., Карп Р.М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения // Кибернетический сборник. М.: Мир, 1964. Т. 9. С. 202-218.
17. Ченцов А.Г. К вопросу о маршрутизации комплексов работ // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 59–82.
18. Lawler, E.L. Efficient implementation of dynamic programming algotithms for sequencing problems // CWI. Technical Reports. Stichting Mathematish Centrum. Mathematishe Besliskunde. BW 106/79. P. 1-16
19. Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Об одной задаче маршрутизации с оптимизацией точки стартафиниша // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2018. Т. 52. С. 103-115.